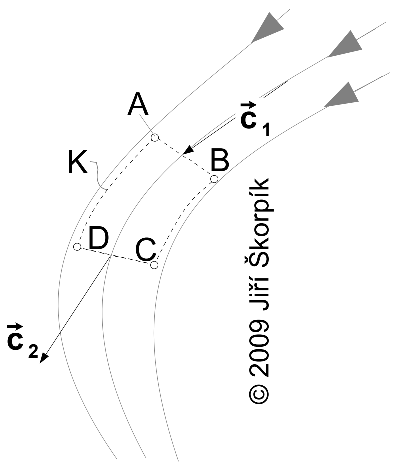
196 Příloha článku 12. Základní rovnice lopatkových strojů

Síla působící na lopatky od proudu tekutiny (Eulerova rovnice)

Každé lopatce přísluší kontrolní objem *K* vymezený body *A-B-C-D*. Tento kontrolní objem vytkneme tak, aby úsek *B-C* i *A-D* tvořila proudnice a zároveň tyto úseky byly hranicemi kontrolního objemu příslušející kontrolnímu objemu sousední lopatky takže proudnice *B-C* a *A-D* by měly být stejné:



Tento kontrolní objem obsahuje tekutinu, na kterou působí síla *R*, která je součtem vnějších sil:

$$\vec{R}=\vec{F}_h+\vec{F}_p+\vec{F}_t \quad \text{(a),}$$

R [N] síla působící na tekutinu uvnitř kontrolního objemu; $\mathbf{F_h}$ [N] hmotnostní síly působící na tekutinu (grav. zrychlení, odstředivá zrychlení, Coriolisovým zrychlení apod.); $\mathbf{F_p}$ [N] tlaková síly na hranici kontrolního objemu od okolní tekutiny; $\mathbf{F_t}$ [N] síla působící na tekutinu uvnitř kontrolního objemu od těles uvnitř nebo na hranici kontrolního objemu.

Tato síla vyvolá změnu hybnosti proudu (zpomalí/zrychlí proud, změní směr proudu) v čase:

$$\vec{R}=\frac{d\vec{c}}{d\tau}m=\frac{d\vec{H}}{d\tau} \quad \text{(b),}$$

H [N·s] hybnost pracovní tekutiny v kontrolním objemu; **τ** [s] čas; **m** [kg] hmotnost pracovní tekutiny v kontrolním objemu; **c** [m·s^{-1}] střední rychlost pracovní tekutiny v kontrolním objemu.

Poznámka
Jestliže výsledná síla působící na tekutinu je rovna nule *R=0*, potom zůstává hybnost proudu nezměněna, například ideální proudění rovným potrubím konstantního průřezu.

Přičemž síla působící na objem pracovní tekutiny o velikosti *dK* respektive hmotnosti *dm* lze vyjádřit jako:

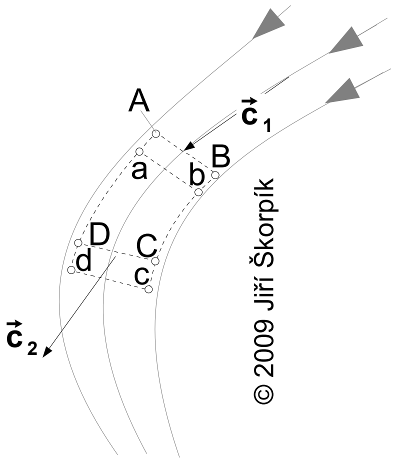
$$d\vec{R}=\frac{d\vec{c}}{d\tau}dm=\frac{d(\vec{c}\cdot dm)}{d\tau}=\frac{d\,d\vec{H}}{d\tau}=\frac{d^2\vec{H}}{d\tau} \quad \text{(c),}$$

c [m·s^{-1}] střední rychlost pracovní tekutiny v kontrolním objemu *dV* respektive *dm*; **dH** [N·s] hybnost pracovní tekutiny uzavřené v objemu *dK* respektive *dm*.

Integrací rovnice *(c)* přes celý kontrolní objem *K* lze získat zpět rovnici *(b)*:

$$\vec{R}=\frac{d}{d\tau}\int_K \vec{c}\,dm=\frac{d}{d\tau}\vec{H} \quad \text{(d).}$$

Za dobu *dτ* se tekutina obsažená v kontrolním objemu posune o určitou vzdálenost a kontrolní objem se zdeformuje na na objem *a-b-c-d*:



Za stejnou dobu se hybnost tekutiny změní o dH, přičemž je zřejmé že tato změna bude odpovídat rozdílu její hybnosti mezi stavem kdy zaplňovala objem A-B-C-D a okamžitým stavem a-b-c-d:

$$d\vec{H}=\int_{abcd}\vec{c}\,dm-\int_{ABCD}\vec{c}\,dm,$$

$$\int_{abcd}\vec{c}\,dm=\int_{abCD}\vec{c}\,dm+\int_{DCcd}\vec{c}\,dm,$$

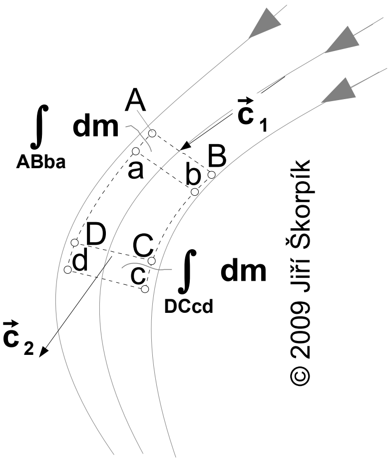
$$\int_{ABCD}\vec{c}\,dm=\int_{ABba}\vec{c}\,dm+\int_{abCD}\vec{c}\,dm.$$

$$d\vec{H}=\int_{abCD}\vec{c}\,dm+\int_{DCcd}\vec{c}\,dm-\int_{ABba}\vec{c}\,dm-$$
$$-\int_{abCD}\vec{c}\,dm=\int_{DCcd}\vec{c}\,dm-\int_{ABba}\vec{c}\,dm.$$

Při velmi malé změně bude rychlost proudění pracovní tekutiny v obejmu $DCcd$ rovna rychlosti c_2. Podobně lze postupovat i u objemu $ABba$:

$$d\vec{H}=\vec{c}_2\int_{DCcd}dm-\vec{c}_1\int_{ABba}dm.$$

Výsledek integrace členů $\int_{DCcd}dm$, $\int_{ABba}dm$ bude roven hmotnosti pracovní tekutiny, která do uvedených objemů *přitekla/odtekla* za dobu $d\tau$, protože předpokládáme stacionární nebo-li ustálený průtok musí si být tyto hmotnosti rovny. To znamená, že tekutiny, která odteče z objemu A-B-b-a má stejnou hmotnost jako tekutina, která přiteče do objemu D-C-c-d:



$$\int_{DCcd}dm=\dot{m}\cdot d\tau;\ \int_{ABba}dm=\dot{m}\cdot d\tau,$$

m [kg·s^{-1}] hmotnostní průtok pracovní tekutiny protékající kontrolním objemem.

$$d\vec{H}=\vec{c}_2\dot{m}\cdot d\tau-\vec{c}_1\dot{m}\cdot d\tau.$$

Síla působící na tekutinu uvnitř kontrolního objemu se vypočítá dosazením poslední rovnice do rovnice *(b)*:

$$\vec{R}=\vec{c}_2\cdot\dot{m}-\vec{c}_1\cdot\dot{m}=\vec{H}_2-\vec{H}_1 \qquad \text{(e).}$$

Zároveň síly působící od tělesa lopatky F_t jsou stejně veliké ale opačného smyslu než jakou působí objem kapaliny na lopatky v kontrolním objemu:

$$\vec{F}=-\vec{F}_t \qquad \text{(f),}$$

F [N] výslednice sil působící na tělesa uvnitř či na hranici kontrolního objemu od proudu tekutiny.

Dosazením rov. *(e)* a *(f)* do *(a)*:

$$\vec{F}=\vec{H}_1-\vec{H}_2+\vec{F}_h+\vec{F}_p.$$

Podle Newtonova gravitačního zákona těleso setrvá v klidu nebo v přímočarém rovnoměrném pohybu pokud na něj nepůsobí síla. To samé platí i na proud tekutiny.