

Příloha 437 článku [34. Oběh Stirlingova motoru](http://www.transformacni-technologie.cz/34.html), <http://www.transformacni-technologie.cz/34.html>.

Rovnice tlaku pracovního plynu ve Stirlingově motoru

Sestrojení diferenciální rovnice popisující změny jednotlivých veličin za nekonečně malé změny objemu vychází z hmotnostní bilance pracovního plynu v motoru. Při sestavování popisných rovnic je uvažováno jednorozměrné proudění ideálního plynu:

Hmotnost pracovního plynu v pracovním objemu motoru je konstantní a rovná se součtu hmotností v dílčích pracovních objemech motoru:

$$m = m_T + m_R + m_S$$

m [kg] celková hmotnost pracovního plynu v pracovním objemu motoru,
 m_T [kg] hmotnost pracovního plynu na teplé straně motoru,
 m_R [kg] hmotnost pracovního plynu v regenerátoru,
 m_S [kg] hmotnost pracovního plynu na studené straně motoru.

Protože hmotnost pracovního plynu v motoru je stálá bude přírůstek hmotnosti roven nule:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial m_T} dm_T + \frac{\partial m}{\partial m_R} dm_R + \frac{\partial m}{\partial m_S} dm_S = 0 \quad [42.$$

377]

$$\frac{\partial m}{\partial m_T} = 1, \frac{\partial m}{\partial m_R} = 1, \frac{\partial m}{\partial m_S} = 1, \text{ takže lze psát:}$$

$$dm_R = -dm_T - dm_S \quad (a).$$

Hmotnost pracovního plynu dm_i , který vstoupil či vystoupil z dílčího pracovního objemu, odpovídá objemu dV_i podle stavové rovnice. Tento objem je výsledkem objemové změny dílčího pracovního objemu způsobené pohybem

pístu a objemové změny pracovního plynu způsobené změnou jeho stavových veličin.

Objem pracovního plynu vystupující z teplé strany motoru nebo do ní vstupující dV_T (na hranici s regenerátorem) je roven:

$$dV_T = dV_T^{PP} - dV_{TV} \quad (b),$$

dV_T [m³] objem pracovního plynu vystupující či vstupující z teplé strany motoru do regenerátoru,
 dV_{TV} [m³] změna objemu válce na teplé straně,
 dV_T^{PP} [m³] změna objemu pracovního plynu na teplé straně vlivem změny jeho stavových veličin.

Kladná hodnota objemu dV_T znamená, že se jedná o objem pracovního plynu, který z teplé strany motoru vstupuje do regenerátoru.

Stejně tak pro objem pracovního plynu vystupující ze studené strany motoru nebo do ní vstupující dV_S platí:

$$dV_S = dV_S^{PP} - dV_{SV} \quad (c)$$

dV_S [m³] objem pracovního plynu vystupující či vstupující ze studené strany motoru do regenerátoru,
 dV_{SV} [m³] změna objemu válce na studené straně,
 dV_S^{PP} [m³] změna objemu pracovního plynu na studené straně vlivem změny jeho stavových veličin.

Objem pracovního plynu vystupující z regenerátoru nebo do něj vstupující dV_R odpovídá pouze změně objemu pracovního plynu vlivem změny jeho stavových veličin, protože absolutní objem mrtvého objemu je konstantní:
 $dV_R = dV_R^{PP}$.

Jednotlivé elementární hmotnosti z rovnice (a) lze tedy vyjádřit za pomoci stavové rovnice a rovnic (b), (c):

$$-dm_R = \frac{p}{r \cdot T_R} dV_R^{pp},$$

r [$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$] individuální plynová konstanta,

$$-dm_T = \frac{p}{r \cdot T_{TR}} dV_T = \frac{p}{r \cdot T_{TR}} (dV_T^{pp} - dV_{TV}),$$

$$-dm_S = \frac{p}{r \cdot T_{SR}} dV_S = \frac{p}{r \cdot T_{SR}} (dV_S^{pp} - dV_{SV}).$$

Dosazením těchto rovnic do rovnice (a) a úpravou:

$$\frac{T_{TR}}{T_R} dV_R^{pp} = dV_{TV} - dV_T^{pp} + \frac{T_{TR}}{T_{SR}} (dV_{SV} - dV_S^{pp})$$

(d).

Jednotlivé objemové změny pracovního plynu závisí na exponentu polytropy ve vyšetřovaném objemu.

V motoru probíhají polytropické změny, takže objem pracovního plynu na teplé straně lze popsat rovnicí polytropy:

$$p \cdot (V_T^{pp})^n = \text{konst.} = K$$

Diferenciální tvar této rovnice opět získáme z poznatku, že pravá strana rovnice je konstantní, takže její přírůstek bude roven nule:

$$dK = \frac{\partial K}{\partial p} dp + \frac{\partial K}{\partial V_T^{pp}} dV_T^{pp} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial p} = (V_T^{pp})^n, \quad \frac{\partial K}{\partial V_T^{pp}} = p \cdot n \cdot (V_T^{pp})^{n-1}$$

$$(V_T^{pp})^n dp + p \cdot n \cdot (V_T^{pp})^{n-1} dV_T^{pp} = 0$$

$$dV_T^{pp} = -\frac{V_T^{pp}}{p \cdot n} dp,$$

$V_T^{pp} = V_T$, (pracovní plyn zaplňuje celý objem teplé strany)

$$dV_T^{pp} = -\frac{V_T}{p \cdot n} dp$$

n [-] střední exponent polytropy v pracovním objemu motoru.

Stejným způsobem lze odvodit změny objemu pracovního plynu dV_S^{pp} a dV_R^{pp} . Dosazením těchto změn do rovnice (d):

$$-\frac{T_{TR}}{T_R} \frac{V_R}{p \cdot n} dp = dV_{TV} + \frac{V_T}{p \cdot n} dp + \frac{T_{TR}}{T_{SR}} \left(dV_{SV} + \frac{V_S}{p \cdot n} dp \right) \quad (e).$$

Z [34.435(2)] plyne (podmínka zajišťuje platnost rovnice (e) pro oba směry proudění plynu z/do válce):

$$\tau = \frac{T_{TR}}{T_{SR}} = \text{konst.}^*$$

Jestliže změna objemu pracovního plynu odpovídá polytropické změně se středním exponentem polytropy platí pro teplotní poměr mezi teplotou na hranici regenerátoru a střední teplotou v regenerátoru:

$$\tau_R = \frac{T_{TR}}{T_R} = \text{konst.}^*$$

**Poznámka*

Pokud by byl exponent polytropy v celém objemu stejný (roven střednímu) bude teplotní poměr mezi dvěma jakýmkoliv elementárními objemy pracovního plynu konstantní (zůstává zachován teplotní profil) a předpoklad (2) z [34.435] není nutný.

Označením teplotních poměrů symbolem τ respektive τ_R a následnou úpravou se zápis rovnice (e) zjednoduší na:

$$-\tau_R \frac{V_R}{p \cdot n} dp = dV_{TV} + \frac{V_T}{p \cdot n} dp + \tau \left(dV_{SV} + \frac{V_S}{p \cdot n} dp \right) \quad (f).$$

Mrtvé objemy na teplé a studené straně zahrnují i objem válců:

$$V_T = V_{TM} + V_{TV},$$

$$V_S = V_{SM} + V_{SV}.$$

Dosazením do rovnice (f) a separací proměnných:

$$\frac{1}{n} \frac{dp}{p} = \frac{-dV_{TV} - \tau \cdot dV_{SV}}{V_{TV} + \tau \cdot V_{SV} + V_{TM} + \tau \cdot V_{SM} + \tau_R \cdot V_R}.$$

Integrací poslední rovnice:

$$\frac{1}{n} \ln p = -\ln(V_{TV} + \tau \cdot V_{SV} + V_{TM} + \tau \cdot V_{SM} + \tau_R \cdot V_R) + C_{int},$$

separací tlaku na levou stranu rovnice:

$$p = \frac{C_{int}}{(V_{TV} + \tau \cdot V_{SV} + V_{TM} + \tau \cdot V_{SM} + \tau_R \cdot V_R)^n},$$

$C_{int} = e^{C_{int}}$, integrační konstanta.