

Řešení Úlohy 441

Zadané parametry úlohy jsou:

$$c_i = 80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad p_i = 110 \text{ kPa}; \quad t_i = 20 \text{ }^\circ\text{C}; \\ p_e = 114 \text{ kPa}; \quad l = 100 \text{ mm}; \quad r_i = 20 \text{ mm}.$$

Sestavení vzorce pro výpočet poloměru difuzoru

Změnu průřezu v závislosti na požadovaném gradientu tlaku popisuje rovnice [41.432]:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} r \cdot T_i \frac{n-1}{n} \frac{1}{p_i^{\frac{n-1}{\kappa}}} \frac{1}{c^2 \cdot p^{\frac{1}{\kappa}}} - \frac{1}{n} \frac{1}{p} \right) \frac{dp}{dx}.$$

Pro kompresi beze ztrát:

$$n = \kappa.$$

Přičemž konstanta izoentropie suchého vzduchu je:

$$\kappa = 1,4.$$

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = \left(r \cdot T_i \frac{1}{p_i^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \frac{1}{c^2 \cdot p^{\frac{1}{\kappa}}} - \frac{1}{\kappa} \frac{1}{p} \right) \frac{dp}{dx}.$$

Gradient tlaku ve směru osy difuzoru je stálý tj:

$$\frac{dp}{dx} = \text{konst.} = \frac{p_e - p_i}{l} = 40000 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Individuální měrná plynová konstanta suchého vzduchu je:

$$r = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Hustota ze stavové rovnice plynů [43.955]:

$$\rho_i = \frac{p_i}{r \cdot T_i} = 1,3074 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Pro zjednodušení zápisu lze definovat dvě pomocné konstanty:

$$K_1 = r \cdot T_i \frac{1}{p_i^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = 3051,9252 \text{ Pa}^{-1},$$

$$K_2 = -\frac{1}{\kappa} = -0,71 \text{ Pa}^{-1}.$$

$$\frac{dA}{A} = \left(K_1 \frac{1}{c^2 \cdot p^{\frac{1}{\kappa}}} + K_2 \frac{1}{p} \right) \frac{dp}{dx} dx.$$

Levou stranu rovnice lze upravit na vhodnější tvar respektive jako funkci poloměru difuzoru:

$$A = \pi r^2,$$

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r,$$

$$dA = 2\pi r dr.$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{2\pi r}{\pi r^2} dr = \frac{2}{r} dr = \\ = \left(K_1 \frac{1}{c^2 \cdot p^{\frac{1}{\kappa}}} + K_2 \frac{1}{p} \right) \frac{dp}{dx} dx,$$

$$\frac{dr}{r} = \left(\frac{K_1}{2} \frac{1}{c^2 \cdot p^{\frac{1}{\kappa}}} + \frac{K_2}{2} \frac{1}{p} \right) \frac{dp}{dx} dx.$$

Řešením průběhu změny průměru difuzoru je integrace poslední rovnice:

$$\int_{r_i}^{r_x} \frac{dr}{r} = \int_0^x \left(\frac{K_1}{2} \frac{1}{c^2 \cdot p^{\frac{1}{\kappa}}} + \frac{K_2}{2} \frac{1}{p} \right) \frac{dp}{dx} dx,$$

$$[\ln R]_{r_i}^{r_x} = \int_0^x \left(\frac{K_1}{2} \frac{1}{c^2 \cdot p^{\frac{1}{\kappa}}} + \frac{K_2}{2} \frac{1}{p} \right) \frac{dp}{dx} dx,$$

$$\ln r_x = \int_0^x \left(\frac{K_1}{2} \frac{1}{c^2 \cdot p^{\frac{1}{\kappa}}} + \frac{K_2}{2} \frac{1}{p} \right) \frac{dp}{dx} dx + \ln r_i \quad (a).$$

Řešení

Technickým řešením je *Rovnici (a)* převést do diferenční tvar:

$$\ln r_x = \sum_{j=1}^{j=20} \left(\frac{K_1}{2} \frac{1}{\left(\frac{c_j + c_{j-1}}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{p_j + p_{j-1}}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa}}} + \frac{K_2}{2} \frac{1}{\frac{p_j + p_{j-1}}{2}} \right) \frac{dp}{dx} \Delta x + \ln r_i.$$

Velikost difference Δx se navrhne podle požadavku na hladkost křivky tvaru difuzoru pro tento případ:

$$\Delta x = 5 \text{ mm.}$$

Tlak na jednotlivých souřadnicích lze získat z gradientu tlaku:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= 40\,000, \\ dp &= 40\,000 dx, \\ \int_{p_i}^{p_j} dp &= 40\,000 \int_0^x dx, \\ p &= \frac{dp}{dx} x + p_i. \end{aligned}$$

Rychlost na jakékoliv souřadnici difuzoru podle vzorce pro rychlost [40.101] rozšířenou o rovnici pro rozdíl entalpie [13.450]:

$$c_j = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} r \cdot T_i \left[1 - \left(\frac{p_j}{p_i} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]} + c_i^2.$$

J	x [m]	p _i [Pa]	c _i [m·s ⁻¹]
0	0,0E+0	110000	80
1	5,0E-3	110200	78,07
2	1,0E-2	110400	76,08
3	1,5E-2	110600	74,05
4	2,0E-2	110800	71,97
5	2,5E-2	111000	69,82
6	3,0E-2	111200	67,61
7	3,5E-2	111400	65,33
8	4,0E-2	111600	62,97
9	4,5E-2	111800	60,52
10	5,0E-2	112000	57,97
11	5,5E-2	112200	55,3
12	6,0E-2	112400	52,51
13	6,5E-2	112600	49,56
14	7,0E-2	112800	46,42
15	7,5E-2	113000	43,07
16	8,0E-2	113200	39,43
17	8,5E-2	113400	35,43
18	9,0E-2	113600	30,92
19	9,5E-2	113800	25,64
20	1,0E-1	114000	18,95

J	ln r _x [m]	r _x [m]
0	-3,91	2,00E-2
1	-3,9	2,02E-2
2	-3,89	2,05E-2
3	-3,88	2,07E-2
4	-3,86	2,10E-2
5	-3,85	2,13E-2
6	-3,83	2,17E-2
7	-3,82	2,20E-2
8	-3,8	2,24E-2
9	-3,78	2,29E-2
10	-3,76	2,33E-2
11	-3,73	2,39E-2
12	-3,71	2,45E-2
13	-3,68	2,52E-2
14	-3,65	2,60E-2
15	-3,61	2,70E-2
16	-3,57	2,82E-2
17	-3,52	2,97E-2

18	-3,45	3,18E-2
19	-3,36	3,49E-2
20	-3,21	4,05E-2