518

Odvození Hugoniotova teorému

Proudění plynu v proudové trubici proměnlivého průřezu lze popsat rovnicí Prvního zákona termodynamiky pro otevřený systém s tím, že proudění nepředává práci v ně tohoto systému.

Elementární objem plynu *dm* protéká trubicí proměnlivého průřezu a na délce trasy *x* je jeho energetická bilance podle prvního zákona termodynamiky [43.288]:

$$da_i = dq - du - d(p \cdot v) - \frac{dc^2}{2} - g \cdot dz.$$

Proudění nekoná vnější práci a jestliže, že děj natolik rychlý a uvnitř proudění neprobíhá chemická reakce, tak objem plynu nesdílí teplo s okolím. Změny potenciální energie v rámci kanálu lze zanedbat, takže lze zjednodušeně psát:

$$da_i = 0;\ dq \approx 0;\ g \cdot dz \approx 0,$$
$$0 = 0 - du - p\,dv - vdp - c\,dc.$$

Při dokonalém proudění bez vírů a mísení lze jednotlivé elementární objemu pracovního plynu *dV* považovat za uzavřený termodynamický systém, pro který lze popsat vzorcem [43.937]:

$$0 = du + pdv$$
$$c \cdot dc + \frac{1}{\rho} \cdot dp = 0 \qquad \text{(a).}$$

Druhá rovnice nutná pro vyřešení je rovnice kontinuity:

$$\rho \cdot A \cdot c = \dot{m} = \text{konst.}$$

Přírůstek neboli totální diferenciál hmotnostního průtoku lze vyjádřit ve tvaru [42.387]:

$$d\dot{m} = \frac{\partial \dot{m}}{\partial A} dA + \frac{\partial \dot{m}}{\partial c} dc + \frac{\partial \dot{m}}{\partial \rho} d\rho = 0,$$
$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial A} = c \cdot \rho;\ \frac{\partial \dot{m}}{\partial c} = A \cdot \rho;\ \frac{\partial \dot{m}}{\partial \rho} = A \cdot c,$$
$$d\dot{m} = c \cdot \rho\, dA + A \cdot \rho\, dc + A \cdot c\, d\rho = 0,$$
$$\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} = 0 \qquad \text{(b).}$$

Rovnici (a) lze upravit na tvar vhodný pro dosazení do *Rovnice (b)*:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{c \cdot dc}{dp}$$
$$-\frac{c \cdot dc}{dp} d\rho + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = 0 \qquad \text{(c).}$$

Podle vzorce [39.337] pro rychlost zvuku lze za diferenciál hustoty použít:

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa\, r \cdot T = a^2.$$

Dosazení poslední rovnice do *Rovnice (c)*:

$$-\frac{c \cdot dc}{a^2} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = 0$$
$$-\frac{c \cdot dc}{a^2} \cdot \frac{c}{c} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = 0$$
$$-Ma^2 \frac{dc}{c} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = 0$$
$$\frac{dA}{A} + \frac{dc}{c}(1 - Ma^2) = 0.$$