746 Příloha článku 12. Základní rovnice lopatkových strojů.

Odvození Eulerovy rovnice hydrodynamiky pro potenciální proudění

Tato rovnice popisuje energetickou bilanci ustáleného potenciálního proudění ideální tekutiny v nehybném kanále dokonale tepelné izolovaném od okolí.

Při proudění se může mezi sebou transformovat vnitřní tepelná, tlaková, kinetická a potenciální energie [43.288]. Jestliže se jedná o potenciální proudění znamená to, že v každém bodě objemu lze definovat hodnotu jednotlivých energií podle nějaké funkce a tedy lze stanovit i jejich gradienty [42.417], který určuje směr a velikost růstu/poklesu jednotlivého druhu energie ve vyšetřovaném objemu:

$\nabla(u)$ gradient měrné vnitřní tepelné energie

$\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)$ gradient měrné tlakové energie

$\nabla\left(\frac{c^2}{2}\right)$ gradient měrné kinetické energie (gradient potenciální energie je současně zrychlení tekutiny [42.680])

$\nabla(e_p)$ gradient měrné potenciální energie.

$$e_p=\vec{g}\cdot\vec{s}$$

e_p $[J\cdot kg^{-1}]$ měrná potenciální energie, $\vec{s}$ $[m]$ vektor směru.

V tomto případě uvažujeme pouze gravitační zrychlení, které je v celém objemu přibližně stejné, proto lze psát:

$$\nabla(e_p)=\vec{g}.$$

Jestliže gradient nějaké energie klesá znamená to, že gradient jiné energie roste stejně rychle, ale opačným směrem, takže při zanedbání změn potenciální energie musí být součet jednotlivých gradientů roven nule:

$$\nabla(u)+\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)+\nabla\left(\frac{c^2}{2}\right)=0.$$

Součet vnitřní a tlakové energie je entalpie, připočtením kinetické energie se jedná o celkovou entalpii:

$$\nabla(u)+\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)+\nabla\left(\frac{c^2}{2}\right)=\nabla i_c.$$

Jestliže součet gradientů bude různý od nuly znamená to, že se mění obsah energie v tekutině způsobený vnějším zrychlením tj. mění se potenciální energie. Jestliže hodnota levé strany poslední rovnice klesá znamená to, že tekutiny proudění proti působení vnějšího zrychlení a potenciální energie roste a naopak tedy lze psát:

$$\nabla u+\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)+\nabla\left(\frac{c^2}{2}\right)=\vec{g} \qquad \text{(a).}$$

Rovnice (a) je Eulerova rovnice hydrodynamiky pro ustálené potenciální proudění ideální tekutiny.

Klasický zápis Eulerovy rovnice hydrodynamiky nezahrnuje změny vnitřní tepelné energie tekutiny:

$$\vec{a}=\frac{\partial\vec{c}}{\partial\tau}+\vec{c}(\nabla\vec{c})=\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p \qquad \text{(b)}$$

$$\vec{R}=\vec{g}+\vec{a}_o-\vec{a}_c,$$

$\vec{R}$ $[m\cdot s^{-2}]$ výslednice vnějšího zrychlení (součet gravitačního zrychlení, odstředivého a Coriolisova),

$\vec{a}$ $[m \cdot s^{-2}]$ zrychlení tekutiny.

Pro ustálené proudění pevným kanálem:

$$\vec{c}(\nabla \vec{c}) = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \, .$$

Z vektorové analýzy lze člen $\vec{c}(\nabla \vec{c})$ upravit takto:

$\vec{c}(\nabla \vec{c}) = \nabla \left(\frac{c^2}{2} \right) - \vec{c} \times (\nabla \times \vec{c})$ [2, s. 163], [1, s. 230].

Pro potenciální proudění: $\nabla \times \vec{c} = 0$ [42.920].

Takže *Rovnici (b)* lze psát ve tvaru:

$$\nabla \left(\frac{c^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{g} \, .$$

To se shoduje s odvozenou *Rovnici (a)*.

Odkazy

1. REKTORYS, Karel, CIPRA, Tomáš, DRÁBEK, Karel, FIEDLER, Miroslav, FUKA, Jaroslav, KEJLA, František, KEPR, Bořivoj, NEČAS, Jindřich, NOŽIČKA, František, PRÁGER, Milan, SEGETH, Karel, SEGETHOVÁ, Jitka, VILHELM, Václav, VITÁSEK, Emil, ZELENKA, Miroslav. *Přehled užité matematiky I, II*, 2003. 7. vydání. Praha: Prometheus, spol. s.r.o., ISBN 80-7196-179-5.

2. GARAJ, Jozef. *Základy vektorového počtu*, 1957. Vydanie prvé, Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, n.p.