746 Příloha článku 12. Základní rovnice lopatkových strojů.

Odvození energetické rovnice pro prostorové souřadnice při potenciálním proudění

Tato rovnice popisuje energetickou bilanci ustáleného potenciálního proudění ideální tekutiny kanále.

Při proudění se v tekutině podle prvního zákona termodynamiky může mezi sebou transformovat vnitřní tepelná, tlaková, kinetická a potenciální energie , přičemž tekutina může konat práci a sdílet teplo s okolím :

$$da_i = dq - du - d(p\cdot v) - \frac{dc^2}{2} - d\,e_p \quad [43.288].$$

Při potenciálním ustáleném proudění nedochází k promíchávaní ani víření tekutiny takže uvedená rovnice platí pro každé proudové vlákno.

V potenciálním vektorovém poli je přírůstek funkce skalárním součinem gradientu funkce a jednotkového vektoru směru [42.677], takže lze psát:

$$da_i = \nabla a_i \cdot d\vec{s}\,,$$
$$dq = \nabla q \cdot d\vec{s}\,,$$
$$du = \nabla u \cdot d\vec{s}\,,$$
$$d(p\cdot v) = \nabla(p\cdot v)\cdot d\vec{s}\,,$$
$$\frac{dc^2}{2} = \nabla\left(\frac{c^2}{2}\right)\cdot d\vec{s}\,,$$
$$d\,e_p = \nabla e_p \cdot d\vec{s}\,,$$

$$\nabla a_i = \nabla q - \nabla u - \nabla(p\cdot v) - \nabla\left(\frac{c^2}{2}\right) - \nabla e_p.$$

V případě, že vnější zrychlení je v celém vyšetřovaném objemu stejné lze pro potenciální energii psát:

$$e_p = \vec{g}\cdot\vec{s}\,,$$

e_p [J·kg^{-1}] měrná potenciální energie; $\vec{s}$ [m] vektor směru, proto lze psát rovnost:

$$\nabla(e_p) = \vec{g}.$$

$$\nabla a_i = \nabla q - \nabla u - \nabla(p\cdot v) - \nabla\left(\frac{c^2}{2}\right) - \vec{g} \quad (a).$$

Jestliže gradient nějaké energie klesá znamená to, že gradient jiné energie roste nebo se koná práce či se odebírá teplo.

V [43.288] je definovaná celková entlapie jako součet vnitřní, tlakové a kinetické energie, takže *Rovnici (a)* lze ještě zapsat ve tvaru:

$$\nabla a_i = \nabla q - \nabla i_c - \vec{g}.$$

Rovnici (a) lze upravit pro adiabatické stacionární proudění bez konání práce do tvaru:

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nabla\left(\frac{c^2}{2}\right) = \vec{g} \quad (b),$$

což je Eulerova rovnice hydrodynamiky pro ustálené potenciální proudění ideální tekutiny.

Klasický zápis Eulerovy rovnice hydrodynamiky nezahrnuje změny vnitřní tepelné energie tekutiny:

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{c}}{\partial\tau} + \vec{c}(\nabla\vec{c}) = \vec{R} - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad (c),$$

kde $\vec{\mathbf{R}}$ [m·s^{-2}] výslednice vnějšího zrychlení (součet gravitačního zrychlení, odstředivého a Coriolisova).

$$\vec{R} = \vec{g} + \vec{a}_o - \vec{a}_c\,,$$

$\vec{a}$ [m·s^{-2}] zrychlení tekutiny.

Pro ustálené proudění pevným

kanálem:

$$\vec{c}(\nabla\vec{c})=\vec{g}-\frac{1}{\rho}\nabla p\,.$$

Z vektorové analýzy lze člen $\vec{c}(\nabla\vec{c})$ upravit takto:

$$\vec{c}(\nabla\vec{c})=\nabla\left(\frac{c^2}{2}\right)-\vec{c}\times(\nabla\times\vec{c})$$ [2, s. 163], [1, s. 230].

Pro potenciální proudění: $\nabla\times\vec{c}=0$ [42.920].

Takže *Rovnici (c)* lze psát ve tvaru:

$$\nabla\left(\frac{c^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\nabla p=\vec{g}\,.$$

To se shoduje s odvozenou *Rovnici (b)*.

Odkazy

1. REKTORYS, Karel, CIPRA, Tomáš, DRÁBEK, Karel, FIEDLER, Miroslav, FUKA, Jaroslav, KEJLA, František, KEPR, Bořivoj, NEČAS, Jindřich, NOŽIČKA, František, PRÁGER, Milan, SEGETH, Karel, SEGETHOVÁ, Jitka, VILHELM, Václav, VITÁSEK, Emil, ZELENKA, Miroslav. *Přehled užité matematiky I, II*, 2003. 7. vydání. Praha: Prometheus, spol. s.r.o., ISBN 80-7196-179-5.

2. GARAJ, Jozef. *Základy vektorového počtu*, 1957. Vydanie prvé, Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, n.p.