Tato Příloha **801** je součástí článku 19. Návrh axiálních a diagonálních stupňů lopatkových strojů, http://www.transformacni-technologie.cz/19.html.

Odvození rovnice pro optimální aerodynamické zatížení axiální stupně

Přibližnou rovnici lze odvodit za těchto zjednodušujících předpokladů:

(1) Stupeň pracuje při optimální obvodové práci tzn. $c_{2u}=0$ pro turbínové stupně a $c_{1u}=0$ pro stupně pracovních strojů.

Optimální zatížení lze vypočítat ze vzorce pro hustotu lopatkové mříže:

$$\sigma=\frac{2\cdot l_E}{u\cdot c_z\cdot w_{st}}$$ [16. id809] (a).

Součinitel vztlaku při absenci třecích sil:

$$c_z=c_{z,iz}=\frac{2}{\sigma}(\mathrm{cotg}\,\beta_1-\mathrm{cotg}\,\beta_2)\sin\beta_{st}$$ [16. id633].

Odtud po dosazení do rovnice *(a)* a úpravě lze získat optimální poměr mezi obvodovou prací stupně, obvodovou rychlostí, axiální rychlostí a zakřivení proudu:

$$\sigma=\frac{2\cdot l_E}{u\,\frac{2}{\sigma}(\mathrm{cotg}\,\beta_1-\mathrm{cotg}\,\beta_2)\sin\beta_{st}\cdot w_{st}}$$

$$1=\frac{l_E}{u(\mathrm{cotg}\,\beta_1-\mathrm{cotg}\,\beta_2)\,c_a}$$ (b).

Dále lze rovnici ještě zjednodušit zvlášť pro turbínový stupeň a zvlášť pro stupeň pracovního stroje.

Z rychlostního trojúhelníku lze odvodit:

$$c_a = c_1 \sin\alpha_1 \,.$$

$$\operatorname{cotg}\beta_1 = \frac{c_{1u} - u}{c_a} = \frac{c_1 \cos\alpha_1 - u}{c_a} \,.$$

$$\operatorname{cotg}(\beta_2 - 90°) = \frac{c_a}{u} = \frac{\operatorname{cotg}\beta_2 \cdot \operatorname{cotg} 90° + 1}{\operatorname{cotg} 90° - \operatorname{cotg}\beta_2} = \frac{1}{-\operatorname{cotg}\beta_2}$$

$$\operatorname{cotg}\beta_2 = -\frac{u}{c_a} \,.$$

Dosazením posledních rovnic do rovnice *(b)*:

$$1 = \frac{l_E}{u\left(\frac{c_1 \cos\alpha_1 - u}{c_a} - \frac{u}{c_a}\right) c_a} = \frac{l_E}{u \cdot c_1 \cos\alpha_1} \qquad \text{(c).}$$

Zavedením rychlostního poměru:

$x = \frac{u}{c_1}$ [18. id345],

lze následně psát:

$$l_E = x \cdot c_1^2 \cos\alpha_1 \,.$$

K *Rovnici (c)* se lze dopracovat i jednodušeji:

$1 = \frac{l_E}{l_E} = \frac{l_E}{u \cdot c_1 \cos\alpha_1}$, ovšem při tomto odvození šlo především o souvislost s aerodynamikou lopatkové mříže.

Spojení s aerodynamickým zatížením stupně lze vytvořit pomocí zakřivení proudu, které je velmi blízké zakřivení střední čáry profilu lopatky, ze kterého lze usuzovat konstrukční požadavky a typ stupně.

Zakřivení proudu je definováno:

$\beta_2-\beta_1=\Delta\beta$ označení zakřivení podle [15. id315].

V trigonometrii je přehlednější pracovat s funkcí tangent než kotangent, proto předchozí rovnice pro výpočet úhlu relativních rychlostí převedeme na tvar:

$$\mathrm{tg}\,\beta_1=\left(\frac{c_1\cos\alpha_1-u}{c_a}\right)^{-1}=\left(\mathrm{cotg}\,\alpha_1-\frac{u}{c_1\sin\alpha_1}\right)^{-1}$$

$$\beta_1=\mathrm{atg}\left[\left(\mathrm{cotg}\,\alpha_1-\frac{u}{c_1\sin\alpha_1}\right)^{-1}\right]=\mathrm{atg}\left[\left(\mathrm{cotg}\,\alpha_1-\frac{x}{\sin\alpha_1}\right)^{-1}\right].$$

Úhel β_1 bude při $c_{1u}-u<0$ větší jak *90°*. Při výpočtu je nutné tuto skutečnost kontrolovat, protože funkce tangent je opakující se, takže pro $c_{1u}-u<0$:

$$\beta_1=\mathrm{atg}\left[\left(\mathrm{cotg}\,\alpha_1-\frac{x}{\sin\alpha_1}\right)^{-1}\right]+180°\,.$$

$$\mathrm{tg}\,\beta_2=\frac{u}{c_a}=\frac{u}{c_1\sin\alpha_1}$$

$$\beta_2=\mathrm{atg}\left(\frac{u}{c_1\sin\alpha_1}\right)=\mathrm{atg}\left(\frac{x}{\sin\alpha_1}\right).$$

Člen $\mathrm{atg}\left(\frac{u}{c_a}\right)$ nemůže vyjít větší než *90°* přesto úhel β_2 bude vždy větší jak *90°*, takže je nutné poslední rovnici psát ve tvaru:

$$\beta_2 = \mathrm{atg}\left(\frac{x}{\sin\alpha_1}\right) + 90° \,.$$

$$\Delta\beta = 90° + \mathrm{atg}\left(\frac{u}{c_1 \sin\alpha_1}\right) - \mathrm{atg}\left[\left(\mathrm{cotg}\,\alpha_1 - \frac{u}{c_1 \sin\alpha_1}\right)^{-1}\right].$$

$$\Delta\beta = 90° + \mathrm{atg}\left(x\frac{1}{\sin\alpha_1}\right) - \mathrm{atg}\left[\left(\mathrm{cotg}\,\alpha_1 - x\frac{1}{\sin\alpha_1}\right)^{-1}\right] \qquad \text{(d).}$$

Pro $c_{1u} - u < 0$:

$$\Delta\beta = \mathrm{atg}\left(x\frac{1}{\sin\alpha_1}\right) - \mathrm{atg}\left[\left(\mathrm{cotg}\,\alpha_1 - x\frac{1}{\sin\alpha_1}\right)^{-1}\right] - 90° \,.$$

Minimální poměr u/c_1 pro případ turbínové mříže lze odvodit z nerovnosti:

$$\frac{w_2}{w_1} \geqslant 1 \,.$$

Z tvaru optimálního rychlostního trojúhelníka pro axiální turbínové stupně plyne:

$$c_{1u} - u \leqslant u$$

$$c_1 \cos\alpha_1 - u \leqslant u$$

$$\frac{\cos\alpha_1}{2} \leqslant \frac{u}{c_1} \qquad \text{(e).}$$

Obdobně lze pro stupeň pracovního stroje přímo odvodit:

$$1=\frac{l_E}{l_E}=\frac{l_E}{-u\cdot c_{2u}}\ .$$

$$c_{2u}=w_{2u}+u$$

$$\mathrm{tg}\,\beta_2=\frac{c_1}{w_{2u}}\rightarrow w_{2u}=\frac{c_1}{\mathrm{tg}\,\beta_2}$$

$$\beta_2=\beta_1-\Delta\beta \qquad \text{(f)}$$

$$\mathrm{tg}\,\beta_2=\mathrm{tg}\left(\beta_1-\Delta\beta\right)=\frac{\mathrm{tg}\beta_1-\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{1+\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\Delta\beta}\quad [1]$$

$$\mathrm{tg}\left(180°-\beta_1\right)=-\mathrm{tg}\beta_1=\frac{c_1}{u}=\frac{1}{x}$$

$$c_{2u}=\frac{c_1}{\mathrm{tg}\,\beta_2}+u=\frac{c_1}{\dfrac{\mathrm{tg}\,\beta_1-\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{1+\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\Delta\beta}}+u=\frac{c_1\left(1+\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\Delta\beta\right)}{\mathrm{tg}\beta_1-\mathrm{tg}\,\Delta\beta}+u=$$

$$=\frac{c_1\left(1-\dfrac{1}{x}\,\mathrm{tg}\,\Delta\beta\right)}{-\dfrac{1}{x}-\mathrm{tg}\,\Delta\beta}+u=u\left[\frac{\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\,\mathrm{tg}\,\Delta\beta\right)}{-\dfrac{1}{x}-\mathrm{tg}\,\Delta\beta}+1\right]=$$

$$=u\left[\frac{1-\dfrac{1}{x}\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{-1-x\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}+1\right]=u\left[1-\frac{1-\dfrac{1}{x}\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{1+x\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}\right]\cdot$$

$$\frac{c_{2u}}{u}=1-\frac{1-\dfrac{1}{x}\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{1+x\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta} \qquad \text{(g).}$$

Pokud chceme, aby v rotorové řadě lopatek současně došlo k co největšímu stlačení hledáme takový rychlostní trojúhelník, při kterém rozdíl w_1-w_2 bude co největší při konkrétním úhlu prohnutí proudu. Odtud je zřejmé, že je snaha dosáhnout co největšího úhlu β_1 respektive co největší hodnoty rychlostního součinitele x.

Odkazy

1. REKTORYS, Karel, CIPRA, Tomáš, DRÁBEK, Karel, FIEDLER, Miroslav, FUKA, Jaroslav, KEJLA, František, KEPR, Bořivoj, NEČAS, Jindřich, NOŽIČKA, František, PRÁGER, Milan, SEGETH, Karel, SEGETHOVÁ, Jitka, VILHELM, Václav, VITÁSEK, Emil, ZELENKA, Miroslav. *Přehled užité matematiky I, II*, 2003. 7. vydání. Praha: Prometheus, spol. s.r.o., ISBN 80-7196-179-5.