Tato Příloha **333** je součástí článku 39. Efekty při proudění vysokými rychlostmi, http://www.transformacni-technologie.cz/efekty-pri-proudeni-vysokymi-rychlostmi.html.

Odvození rovnic stabilní kolmé rázové vlny (Rankine-Hugoniotovy rovnice)

Odvození je provedeno na základě energetické, silové a hmotnostní rovnováhy mezi proudění před vlnou a za vlnou.

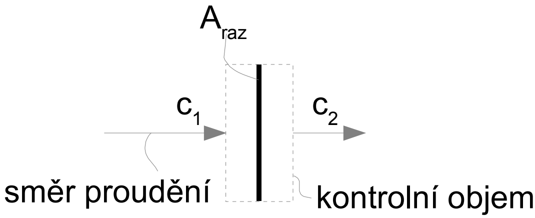
Na rázovou vlnu aplikujeme rovnici I. zákona termodynamiky **pro otevřenou termodynamickou soustavu**:

$$a_i = q + \left(i_1 + \frac{c_1^2}{2}\right) - \left(i_2 + \frac{c_2^2}{2}\right) + \underbrace{g \cdot (H_1 - H_2)}_{\Delta e_p} \qquad [43.\ id288]$$

$a_i = 0$ [J·kg^{-1}] plyn při průchodu vlnou nekoná práci,
$q \approx 0$ [J·kg^{-1}] vlny je velice tenká a stlačení plynu ve vlně velmi rychlé proto lze zanedbat teplo sdílené plynem s okolím vlny,
$\Delta e_p \approx 0$ [J·kg^{-1}] změna potenciální energie plynu ve vlně je zanedbatelná vůči dalším energiím, protože vlna je velmi tenká.

$$i_1 + \frac{c_1^2}{2} = i_2 + \frac{c_2^2}{2} \qquad (a).$$

Ve stabilní kolmé rázové vlně platí **silová rovnováha** proudu mezi proudem vstupující a vystupující do/z vlny:



Silová rovnováha kolmé rázové vlny.
$\mathbf{A_{raz}}$ [m^2] plocha rázové vlny.

$\vec{H}_1 - \vec{H}_2 + \vec{R}_h + \vec{R}_p + \vec{R}_t = 0$ [TT12, id196]

$\vec{R}_h \approx 0$ hmotnostní síly mají zanedbatelný vliv,

$\vec{R}_t = 0$ uvnitř kontrolního objemu ani na jeho okrajích nejsou silové účinky od okolních těles.

Protože proudění je pouze v jednom směru a síly od tlaku na horní a dolní ploše kontrolního objemu se vyruší:

$$(c_1 - c_2)\dot{m} + (p_1 - p_2)A_{raz} = 0$$

$$(c_1 - c_2)\dot{m} = (p_2 - p_1)A_{raz} \qquad \text{(b).}$$

Rovnice kontinuity aplikovaná na rázovou vlnu:

$$d\dot{m} = \rho_1 \cdot c_1 dA_{raz} = \rho_2 \cdot c_2 dA_{raz}$$

$$\rho_1 \cdot c_1 = \rho_2 \cdot c_2 \qquad \text{(c).}$$

Pro ideální plyn platí $c_p = konst.$ pro všechny tlaky a teploty a rovnici *(a)* lze upravit na tvar:

$$c_p \cdot T_1 + \frac{c_1^2}{2} = c_p \cdot T_2 + \frac{c_2^2}{2}.$$

$Ma = \frac{c}{a}$ [39. id337]

$a = \sqrt{\kappa \cdot r \cdot T}.$

Z Mayerova vztahu $c_p = c_v + r$ a Poisonovy konstanty $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ plyne $c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} r$.

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} r \cdot T_1 + \frac{Ma_1^2}{2} a_1^2 = \frac{\kappa}{\kappa-1} r \cdot T_2 + \frac{Ma_2^2}{2} a_2^2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_2^2} \tag{d}$$

Rovnici pro poměr tlaků lze odvodit z rovnice *(c)*:

$$\frac{p_1}{r \cdot T_1} \cdot Ma_1 \cdot a_1 = \frac{p_2}{r \cdot T_2} \cdot Ma_2 \cdot a_2$$

$$\frac{T_2}{T_1} \cdot Ma_1 \cdot \sqrt{\kappa \cdot r \cdot T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot Ma_2 \cdot \sqrt{\kappa \cdot r \cdot T_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \frac{p_2}{p_1} \frac{Ma_2}{Ma_1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \tag{e}$$

a také kombinací rovnici *(c)* a *(b)*:

$$(c_1 - c_2) \rho_1 \cdot c_1 = p_2 - p_1$$

$$c_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1 - c_2 \cdot \rho_1 \cdot c_1 = p_2 - p_1$$

$$c_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1 - c_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2 = p_2 - p_1$$

$$c_1^2 \cdot \rho_1 - c_2^2 \cdot \rho_2 = p_2 - p_1$$

$$Ma_1^2 \cdot a_1^2 \cdot \rho_1 - Ma_2^2 \cdot a_2^2 \cdot \rho_2 = p_2 - p_1$$

$$Ma_1^2 \cdot \kappa \cdot r \cdot T_1 \cdot \rho_1 - Ma_2^2 \cdot \kappa \cdot r \cdot T_2 \cdot \rho_2 = p_2 - p_1$$

$$Ma_1^2 \cdot \kappa \cdot p_1 - Ma_2^2 \cdot \kappa \cdot p_2 = p_2 - p_1$$

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{Ma_1}{Ma_2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \qquad \text{(f)}$$

Rovnice pro výpočet Machova čísla za rázovou vlnou Ma_2 se odvodí z kombinace rovnic *(e)* a *(f)*:

$$\frac{(1+Ma_1^2\cdot\kappa)^2}{(1+Ma_2^2\cdot\kappa)^2}=\frac{Ma_1^2}{Ma_2^2}\frac{1+\frac{\kappa-1}{2}Ma_1^2}{1+\frac{\kappa-1}{2}Ma_2^2}$$

$$\left(1+2\cdot Ma_1^2\cdot\kappa+Ma_1^4\cdot\kappa^2\right)\left(Ma_2^2+\frac{\kappa-1}{2}Ma_2^4\right)=$$

$$=\left(1+2\cdot Ma_2^2\cdot\kappa+Ma_2^4\cdot\kappa^2\right)\left(Ma_1^2+\frac{\kappa-1}{2}Ma_1^4\right)$$

$$Ma_2^2+\frac{\kappa-1}{2}Ma_2^4-Ma_1^2\cdot\kappa\cdot Ma_2^4=Ma_1^2+\frac{\kappa-1}{2}Ma_1^4-Ma_2^2\cdot\kappa\cdot Ma_1^4$$

$$Ma_2^4+Ma_2^2\frac{1+\kappa\cdot Ma_1^4}{\frac{\kappa-1}{2}-\kappa\cdot Ma_1^2}-\frac{Ma_1^2+\frac{\kappa-1}{2}Ma_1^4}{\frac{\kappa-1}{2}-\kappa\cdot Ma_1^2}=0$$

Řešením poslední rovnice (kvadratické) je:

$$Ma_2^2=\frac{\frac{\kappa-1}{2}Ma_1^2+1}{\kappa\cdot Ma_1^2-\frac{\kappa-1}{2}}.$$