Tato Příloha **437** je součástí článku 34. Oběh Stirlingova motoru, http://www.transformacni-technologie.cz/obeh-stirlingova-motoru.html.

Rovnice tlaku pracovního plynu ve Stirlingově motoru

Sestrojení diferenciální rovnice popisující změny jednotlivých veličin za nekonečně malé změny objemu vychází z hmotnostní bilance pracovního plynu v motoru. Při sestavování popisných rovnic je uvažováno jednorozměrné proudění ideálního plynu:

Hmotnost pracovního plynu v pracovním objemu motoru je konstantní a rovná se součtu hmotností v dílčích pracovních objemech motoru:

$$m = m_T + m_R + m_S$$

m [kg] celková hmotnost pracovního plynu v pracovním objemu motoru,
m_T [kg] hmotnost pracovního plynu na teplé straně motoru,
m_R [kg] hmotnost pracovního plynu v regenerátoru,
m_S [kg] hmotnost pracovního plynu na studené straně motoru.

Protože hmotnost pracovního plynu v motoru je stálá bude přírůstek hmotnosti roven nule:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial m_T} dm_T + \frac{\partial m}{\partial m_R} dm_R + \frac{\partial m}{\partial m_S} dm_S = 0$$ [42. id377]

$\frac{\partial m}{\partial m_T} = 1$, $\frac{\partial m}{\partial m_R} = 1$, $\frac{\partial m}{\partial m_S} = 1$, takže lze psát:

$$dm_R = -dm_T - dm_S \qquad \text{(a).}$$

Hmotnost pracovního plynu dm_i, který vstoupil či vystoupil z dílčího pracovního objemu, odpovídá objemu dV_i podle stavové rovnice. Tento objem je výsledkem objemové změny dílčího pracovního objemu způsobené pohybem pístu a objemové změny pracovního plynu způsobené změnou jeho stavových veličin.

Objem pracovního plynu vystupující z teplé strany motoru nebo do ní vstupující dV_T (na hranici s regenerátorem) je roven:

$$dV_T = dV_T^{pp} - dV_{TV} \qquad \text{(b),}$$

dV_T [m^3] objem pracovního plynu vystupující či vstupující z teplé strany motoru do regenerátoru,
dV_{TV} [m^3] změna objemu válce na teplé straně,
dV^{pp}_T [m^3] změna objemu pracovního plynu na teplé straně vlivem změny jeho stavových veličin.

Kladná hodnota objemu dV_T znamená, že se jedná o objem pracovního plynu, který z teplé strany motoru vstupuje do regenerátoru.

Stejně tak pro objem pracovního plynu vystupující ze studené strany motoru nebo do ní vstupující dV_S platí:

$$dV_S = dV_S^{pp} - dV_{SV} \qquad \text{(c)}$$

dV_S [m³] objem pracovního plynu vystupující či vstupující ze studené strany motoru do regenerátoru,

dV_{SV} [m³] změna objemu válce na studené straně,

dV^{pp}_S [m³] změna objemu pracovního plynu na studené straně vlivem změny jeho stavových veličin.

Objem pracovního plynu vystupující z regenerátoru nebo do něj vstupující dV_R odpovídá pouze změně objemu pracovního plynu vlivem změny jeho stavových veličin, protože absolutní objem mrtvého objemu je konstantní: $dV_R = dV_R^{pp}$.

Jednotlivé elementární hmotnosti z rovnice *(a)* lze tedy vyjádřit za pomocí stavové rovnice a rovnic *(b)*, *(c)*:

$$-dm_R = \frac{p}{r \cdot T_R} dV_R^{pp} ,$$

r [kg·J⁻¹·K⁻¹] individuální plynová konstanta,

$$-dm_T = \frac{p}{r \cdot T_{TR}} dV_T = \frac{p}{r \cdot T_{TR}} (dV_T^{pp} - dV_{TV}) ,$$

$$-dm_S = \frac{p}{r \cdot T_{SR}} dV_S = \frac{p}{r \cdot T_{SR}} (dV_S^{pp} - dV_{SV}) .$$

Dosazením těchto rovnic do rovnice *(a)* a úpravou:

$$\frac{T_{TR}}{T_R} dV_M^{pp} = dV_{TV} - dV_T^{pp} + \frac{T_{TR}}{T_{SR}} (dV_{SV} - dV_S^{pp}) \qquad \text{(d).}$$

Jednotlivé objemové změny pracovního plynu závisí na exponentu polytropy ve vyšetřovaném objemu.

V motoru probíhají polytropické změny, takže objem pracovního plynu na teplé straně lze popsat rovnicí polytropy:

$$p \cdot (V_T^{pp})^n = \text{konst.} = K$$

Diferenciální tvar této rovnice opět získáme z poznatku, že pravá strana rovnice je konstantní, takže její přírůstek bude roven nule:

$$dK = \frac{\partial K}{\partial dp} dp + \frac{\partial K}{\partial V_T^{pp}} dV_T^{pp} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial dp} = (V_T^{pp})^n, \ \frac{\partial K}{\partial dV_T^{pp}} = p \cdot n \cdot (V_T^{pp})^{n-1}$$

$$(V_T^{pp})^n dp + p \cdot n \cdot (V_T^{pp})^{n-1} dV_T^{pp} = 0$$

$$dV_T^{pp} = -\frac{V_T^{pp}}{p \cdot n} dp \ ,$$

$V_T^{pp} = V_T$, (pracovní plyn zaplňuje celý objem teplé strany)

$$dV_T^{pp} = -\frac{V_T}{p \cdot n} dp$$

n [-] střední exponent polytropy v pracovním objemu motoru.

Stejným způsobem lze odvodit změny objemu pracovního plynu $dV^{PP}{}_S$ a $dV^{PP}{}_R$. Dosazením těchto změn do rovnice *(d)*:

$$-\frac{T_{TR}}{T_R} \frac{V_R}{p \cdot n} dp = dV_{TV} + \frac{V_T}{p \cdot n} dp + \frac{T_{TR}}{T_{SR}} \left(dV_{SV} + \frac{V_S}{p \cdot n} dp \right) \qquad \text{(e).}$$

Z [34. id435(2)] plyne (podmínka zajišťuje platnost rovnice *(e)* pro oba směry proudění plynu z/do válce):

$$\tau = \frac{T_{TR}}{T_{SR}} = \text{konst.*}$$

Jestliže změna objemu pracovního plynu odpovídá polytropické změně se středním exponentem polytropy platí pro teplotní poměr mezi teplotou na hranici regenerátoru a střední teplotou v regenerátu:

$$\tau_R = \frac{T_{TR}}{T_R} = \text{konst.*}$$

**Poznámka*

Pokud by byl exponent polytropy v celém objemu stejný (roven střednímu) bude teplotní poměr mezi dvěma jakýmikoliv body v pracovním objemu konstantní (zůstává zachován teplotní profil) a předpoklad *(2)* z [34. id435] není nutný.

Označením teplotních poměrů symbolem $\boldsymbol{\tau}$ respektive $\boldsymbol{\tau_R}$ a následnou úpravou se zápis rovnice *(e)* zjednoduší na:

$$-\tau_R \frac{V_R}{p \cdot n} dp = dV_{TV} + \frac{V_T}{p \cdot n} dp + \tau \left(dV_{SV} + \frac{V_S}{p \cdot n} dp \right) \qquad \text{(f).}$$

Mrtvé objemy na teplé a studené straně zahrnují i objem válců:

$V_T = V_{TM} + V_{TV}$,

$V_S = V_{SM} + V_{SV}$.

Dosazením do rovnice *(f)* a separací proměnných:

$$\frac{1}{n} \frac{dp}{p} = \frac{-dV_{TV} - \tau \cdot dV_{SV}}{V_{TV} + \tau \cdot V_{SV} + V_{TM} + \tau \cdot V_{SM} + \tau_R \cdot V_R} .$$

Integrací poslední rovnice:

$$\frac{1}{n}\ln p = -\ln\left(V_{TV} + \tau \cdot V_{SV} + V_{TM} + \tau \cdot V_{SM} + \tau_R \cdot V_R\right) + C_{int}\ ,$$

separací tlaku na levou stranu rovnice:

$$p = \frac{C_{int}}{\left(V_{TV} + \tau \cdot V_{SV} + V_{TM} + \tau \cdot V_{SM} + \tau_R \cdot V_R\right)^n}\ ,$$

$C_{int} = e^{c_{int}}$, integrační konstanta.