

Tato Příloha **518** je součástí článku [39. Efekty při proudění vysokými rychlostmi](http://www.transformacni-technologie.cz/efekty-pri-proudeni-vysokymi-rychlostmi.html), <http://www.transformacni-technologie.cz/efekty-pri-proudeni-vysokymi-rychlostmi.html>.

Odvození Hugoniotova teorému

Proudění plynu v proudové trubici proměnlivého průřezu lze popsat rovnicí Prvního zákona termodynamiky pro otevřený systém s tím, že proudění nepředává práci v ně tohoto systému.

Elementární objem plynu dm protéká trubicí proměnlivého průřezu a na délce trasy x vykoná práci:

$$da_i = dq - du - d(p \cdot v) - \frac{dc^2}{2} - g \cdot dz \quad [43. \text{id}288]$$

$$da_i = 0,$$

$$dq \approx 0$$

$$g \cdot dz \approx 0$$

$$0 = 0 - du - p dv - v dp - c dc$$

Při dokonalém proudění bez vírů a mísení lze jednotlivé elementární objemu pracovního plynu dV považovat za uzavřený termodynamický systém pro který platí:

$$0 = du + p dv \quad [43. \text{id}288]$$

$$c \cdot dc + \frac{1}{\rho} \cdot dp = 0 \quad (a).$$

Druhá rovnice nutná pro vyřešení je rovnice kontinuity:
 $\rho \cdot A \cdot c = \text{konst.}$

Její derivace je:

$$\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} = 0 \quad [42. \text{id}387] \quad (\text{b}).$$

Rovnici (a) lze upravit na tvar vhodný pro dosazení do rovnice (b):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= -\frac{c \cdot dc}{dp} \\ -\frac{c \cdot dc}{dp} d\rho + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{c}).$$

$\frac{dp}{d\rho} = ?$ Tuto derivaci lze vyjádřit z rovnice adiabaty, protože děj považujeme za adiabatický:

$$\rho \frac{1}{\rho^\kappa} = \text{konst.} = K$$

Přírůstek konstanty K je nulový, takže pro něj lze psát:

$$dK = \frac{\partial K}{\partial p} dp + \frac{\partial K}{\partial \rho} d\rho = 0 \quad [42. \text{id}377]$$

$$\frac{\partial K}{\partial p} = \frac{1}{\rho^\kappa}, \quad \frac{\partial K}{\partial \rho} = -\kappa p \frac{1}{\rho^{\kappa+1}}$$

$$\frac{1}{\rho^\kappa} dp - \kappa p \frac{1}{\rho^{\kappa+1}} d\rho = 0$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa p \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{p}{\rho} = r \cdot T \quad [43. \text{id}956] \quad (\text{stavová rovnice ideálního plynu})$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa r \cdot T = a^2 \quad [39. \text{id}337]$$

Dosazení poslední rovnice do rovnice (c):

$$-\frac{c \cdot dc}{a^2} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = 0$$

$$-\frac{c \cdot dc}{a^2} \cdot \frac{c}{c} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = 0$$

$$-Ma^2 \frac{dc}{c} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = 0$$

$$\frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} (1 - Ma^2) = 0.$$