Tato Příloha **705** je součástí článku 19. Návrh axiálních a diagonálních stupňů lopatkových strojů, http://www.transformacni-technologie.cz/navrh-axialnich-a-diagonalnich-stupnu-lopatkovych-stroju.html.

# Rovnice pro osově symetrické proudění ve stupni lopatkového stroje

Obecný tvar Eulerovy rovnice hydrodynamiky má tvar:

$$\vec{a}=\frac{\partial\vec{c}}{\partial\tau}+\vec{c}(\nabla\vec{c})=\vec{g}-\frac{1}{\rho}\nabla p$$ [1, s. 243], [2, s. 24]

Pro stacionární proudění:

$$\frac{\partial\vec{c}}{\partial\tau}=0\ .$$

Při zanedbání tíhových sil lze psát rovnost:

$$\vec{c}(\nabla\vec{c})=-\frac{1}{\rho}\nabla p \qquad \text{(a).}$$

Podle [43. id288] lze pro proudění beze ztrát psát energetickou bilanci:

$$dq=di-\frac{1}{\rho}dp\ .$$

Za *dq* lze dosadit z druhého zákona termodynamiky [43. id968]:

$$T\cdot ds=di-\frac{1}{\rho}dp\ .$$

Jednotlivé přírůstky lze vyjádřit také z gradientu jednotlivých veličin podle [42. id677]:

$ds = \nabla s \cdot d\vec{s}$ kde $\vec{s}$ je směrový vektor.

$di = \nabla i \cdot d\vec{s}$

$dp = \nabla p \cdot d\vec{s}$ .

$$T \cdot \nabla s = \nabla i - \frac{1}{\rho} \nabla p \qquad \text{(b).}$$

Porovnáním *Rovnice (a)* s *Rovnicí (b)* lze pro bilanci stupně psát:

$T \cdot \nabla s = \nabla i + \vec{c}(\nabla \vec{c})$ .

Mnohem lépe se pracuje s celkovou entalpií než se statickou, takže poslední rovnici upravíme:

$$T \cdot \nabla s = \nabla i + \vec{c}(\nabla \vec{c}) + \nabla\left(\frac{c^2}{2}\right) - \nabla\left(\frac{c^2}{2}\right) .$$

$$\nabla i + \nabla\left(\frac{c^2}{2}\right) = \nabla i + \frac{c^2}{2} = \nabla i_c$$

$$T \cdot \nabla s = \nabla i_c + \vec{c}(\nabla \vec{c}) - \nabla\left(\frac{c^2}{2}\right) \qquad \text{(c).}$$

$c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c}$ [3, s. 221-222]

$\nabla\left(\frac{c^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \nabla(\vec{c} \cdot \vec{c})$ [3, s. 222]

$\nabla(\vec{c} \cdot \vec{c}) = 2 \cdot \vec{c}(\nabla \vec{c}) + 2 \cdot \vec{c} \times (\nabla \times \vec{c})$ [4, s. 163], [3, s. 230].

Takže *Rovnici (c)* lze psát ve tvaru:

$T \cdot \nabla s = \nabla i_c - \vec{c} \times (\nabla \times \vec{c})$ .

$$\nabla i_c = \vec{c} \times (\nabla \times \vec{c}) + T \cdot \nabla s \qquad \text{(d).}$$

$$\nabla i_c = \frac{\partial i_c}{\partial r}\vec{i} + \frac{1}{r}\frac{\partial i_c}{\partial \nu}\vec{j} + \frac{\partial i_c}{\partial a}\vec{k}\ .$$

Pro osově symetrické proudění musí být derivace podle úhlu nulové, protože po obvodu je stav veškerých veličin stejný:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = 0\ .$$

$$\nabla i_c = \frac{\partial i_c}{\partial r}\vec{i} + \frac{\partial i_c}{\partial a}\vec{j} \qquad \text{(e).}$$

$$\vec{c}\times(\nabla\times\vec{c}) = \vec{c}\times\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial c_a}{\partial \nu} - \frac{\partial c_u}{\partial a}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial c_r}{\partial a} - \frac{\partial c_a}{\partial r}\right)\vec{j} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\cdot c_u)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial c_r}{\partial \nu}\right)\vec{k}\right]\ .$$

Pro osově symetrické proudění:

$$\vec{c}\times(\nabla\times\vec{c}) = \vec{c}\times\left[\left(-\frac{\partial c_u}{\partial a}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial c_r}{\partial a} - \frac{\partial c_a}{\partial r}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\cdot c_u)}{\partial r}\right)\vec{k}\right] = .$$

$$= \left(\frac{c_u}{r}\frac{\partial (r\cdot c_u)}{\partial r} - c_a\left[\frac{\partial c_r}{\partial a} - \frac{\partial c_a}{\partial r}\right]\right)\vec{i} - \left(c_a\frac{\partial c_u}{\partial a} + \frac{c_r}{r}\frac{\partial (r\cdot c_u)}{\partial r}\right)\vec{j} +$$

$$+ \left[c_r\left(\frac{\partial c_r}{\partial a} - \frac{\partial c_a}{\partial r}\right) + c_u\frac{\partial c_u}{\partial a}\right]\vec{k} \qquad \text{(f).}$$

$$T\cdot\nabla s = T\frac{\partial s}{\partial r}\vec{i} + T\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial \nu}\vec{j} + T\frac{\partial s}{\partial a}\vec{k}$$

Pro osově symetrické proudění:

$$T \cdot \nabla s = T \frac{\partial s}{\partial r} \vec{i} + T \frac{\partial s}{\partial a} \vec{k} \qquad \text{(g).}$$

Kombinací *Rovnic (d), (e), (f), (g)*: pro jednotlivé směry musí platit rovnováha:

$$\frac{\partial i_c}{\partial r} = \frac{c_u}{r} \frac{\partial (r \cdot c_u)}{\partial r} - c_a \left( \frac{\partial c_r}{\partial a} - \frac{\partial c_a}{\partial r} \right) + T \frac{\partial s}{\partial r} \quad \text{pro směr radiální}$$

$$0 = c_a \frac{\partial c_u}{\partial a} + \frac{c_r}{r} \frac{\partial (r \cdot c_u)}{\partial r} \quad \text{pro směr obvodový}$$

$$\frac{\partial i_c}{\partial a} = c_r \left( \frac{\partial c_r}{\partial a} - \frac{\partial c_a}{\partial r} \right) + c_u \frac{\partial c_u}{\partial a} + T \frac{\partial s}{\partial a} \quad \text{pro směr axiální.}$$

# Odkazy

1. MAŠTOVSKÝ, Otakar. *Hydromechanika*, 1964. 2. vydání. Praha: Statní nakladatelství technické literatury.

2. KADRNOŽKA, Jaroslav. *Tepelné turbíny a turbokompresory*, 2004. 1. vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., ISBN 80-7204-346-3.

3. REKTORYS, Karel, CIPRA, Tomáš, DRÁBEK, Karel, FIEDLER, Miroslav, FUKA, Jaroslav, KEJLA, František, KEPR, Bořivoj, NEČAS, Jindřich, NOŽIČKA, František, PRÁGER, Milan, SEGETH, Karel, SEGETHOVÁ, Jitka, VILHELM, Václav, VITÁSEK, Emil, ZELENKA, Miroslav. *Přehled užité matematiky I, II*, 2003. 7. vydání. Praha: Prometheus, spol. s.r.o., ISBN 80-7196-179-5.

4. GARAJ, Jozef. *Základy vektorového počtu*, 1957. Vydanie prvé, Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, n.p.