Tato Příloha **801** je součástí článku 19. Návrh axiálních a diagonálních stupňů lopatkových strojů, http://www.transformacni-technologie.cz/navrh-axialnich-a-diagonalnich-stupnu-lopatkovych-stroju.html.

Odvození rovnice pro optimální aerodynamické zatížení axiální stupně

Přibližnou rovnici lze odvodit za těchto zjednodušujících předpokladů:

(1) Součinitel odporu lopatkové mříže je velmi malý a blízký nule $c_x \approx 0$.

(2) Stupeň pracuje při optimální obvodové práci tzn. $c_{2u}=0$ pro turbínové stupně a $c_{1u}=0$ pro stupně pracovních strojů.

Optimální zatížení lze vypočítat z rovnice pro hustotu lopatkové mříže:

$$\sigma=\frac{2\cdot l_u}{u\cdot c_z\cdot w_{st}}\frac{c_a\cdot\cos\bar{\varepsilon}}{w_{st}\cdot\sin(\beta_{st}+\bar{\varepsilon})}\quad [16.\ \text{id809}] \qquad (a).$$

Pro cx≈ 0 bude klouzací poměr roven nule:

$$\bar{\varepsilon}=0\ .$$

Odtud lze rovnici *(a)* zjednodušit:

$$\sigma=\frac{2\cdot l_u}{u\cdot c_z\cdot w_{st}}\frac{c_a}{w_{st}\cdot\sin\beta_{st}}$$

$$w_{st}\cdot\sin\beta_{st}=w_{st,a}=c_a$$

$$\sigma=\frac{2\cdot l_u}{u\cdot c_z\cdot w_{st}} \qquad (b).$$

Součinitel vztlaku při absenci třecích sil:

$c_z = c_{z,iz} = \frac{2}{\sigma}(\text{cotg}\beta_1 - \text{cotg}\beta_2)\sin\beta_{st}$ [16. id633].

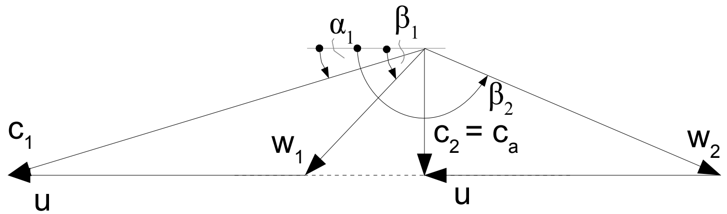
Odtud po dosazení do rovnice *(b)* a úpravě lze získat optimální poměr mezi obvodovou prací stupně, obvodovou rychlostí, axiální rychlostí a zakřivení proudu:

$$\sigma = \frac{2 \cdot l_u}{u\frac{2}{\sigma}(\text{cotg}\beta_1 - \text{cotg}\beta_2)\sin\beta_{st} \cdot w_{st}}$$

$$1 = \frac{l_u}{u(\text{cotg}\beta_1 - \text{cotg}\beta_2)c_a} \qquad \text{(c).}$$

Dále lze rovnici ještě zjednodušit zvlášť pro turbínový stupeň a zvlášť pro stupeň pracovního stroje.

Tvar rychlostních trojúhelníků pro turbínový stupeň je následující:



Optimální rychlostní trojúhelník turbínového stupně.

Z rychlostního trojúhelníku lze odvodit:

$c_a = c_1 \sin\alpha_1$.

$$\text{cotg}\beta_1 = \frac{c_{1u} - u}{c_a} = \frac{c_1\cos\alpha_1 - u}{c_a} .$$

$$\operatorname{cotg}(\beta_2-90°)=\frac{c_a}{u}=\frac{\operatorname{cotg}\beta_2\cdot\operatorname{cotg}90°+1}{\operatorname{cotg}90°-\operatorname{cotg}\beta_2}=\frac{1}{-\operatorname{cotg}\beta_2}$$

$$\operatorname{cotg}\beta_2=-\frac{u}{c_a}\,.$$

Dosazením posledních rovnic do rovnice *(c)*:

$$1=\frac{l_u}{u\left(\frac{c_1\cos\alpha_1-u}{c_a}-\frac{u}{c_a}\right)c_a}=\frac{l_u}{u\cdot c_1\cos\alpha_1} \qquad \text{(d).}$$

K poslední rovnici se lze dopracovat i jednodušeji:

$1=\frac{l_u}{l_u}=\frac{l_u}{u\cdot c_1\cos\alpha_1}$, ovšem při tomto odvození šlo především o souvislost s aerodynamikou lopatkové mříže.

Spojení s aerodynamickým zatížením stupně lze vytvořit pomocí zakřivení proudu, které je velmi blízké zakřivení střední čáry profilu lopatky, ze kterého lze usuzovat konstrukční požadavky a typ stupně.

Zakřivení proudu je definováno:

$\beta_2-\beta_1=\Delta\beta$ označení zakřivení podle [15. id315].

V trigonometrii je přehlednější pracovat s funkcí tangent než kotangent, proto předchozí rovnice pro výpočet úhlu relativních rychlostí převedeme na tvar:

$$\operatorname{tg}\beta_1=\left(\frac{c_1\cos\alpha_1-u}{c_a}\right)^{-1}=\left(\operatorname{cotg}\alpha_1-\frac{u}{c_1\sin\alpha_1}\right)^{-1}$$

$$\beta_1 = \mathrm{atg}\left[\left(\mathrm{cotg}\,\alpha_1 - \frac{u}{c_1 \sin\alpha_1}\right)^{-1}\right].$$

Úhel β_1 bude při $c_1 \cos\alpha_1 - u < 0$ vždy větší jak *90*°. Při výpočtu je nutné tuto skutečnost kontrolovat, protože funkce tangent je opakující se.

$$\mathrm{tg}\,\beta_2 = \frac{u}{c_a} = \frac{u}{c_1 \sin\alpha_1}$$

$$\beta_2 = \mathrm{atg}\left(\frac{u}{c_1 \sin\alpha_1}\right).$$

Člen $\mathrm{atg}\left(\frac{u}{c_a}\right)$ nemůže vyjít větší než *90*° přesto úhel β_2 bude vždy větší jak *90*°, takže je nutné poslední rovnici psát ve tvaru:

$$\beta_2 = \mathrm{atg}\left(\frac{u}{c_1 \sin\alpha_1}\right) + 90\,°.$$

$$\Delta\beta = 90\,° + \mathrm{atg}\left(\frac{u}{c_1 \sin\alpha_1}\right) - \mathrm{atg}\left[\left(\mathrm{cotg}\,\alpha_1 - \frac{u}{c_1 \sin\alpha_1}\right)^{-1}\right].$$

Poměr u/c_1 je tzv. rychlostní poměr:

$x_1 = \frac{u}{c_1}$ [18. id345].

$$\Delta\beta = 90\,° + \mathrm{atg}\left(x_1 \frac{1}{\sin\alpha_1}\right) - \mathrm{atg}\left[\left(\mathrm{cotg}\,\alpha_1 - x_1 \frac{1}{\sin\alpha_1}\right)^{-1}\right] \quad \text{(e).}$$

Minimální poměr u/c_1 pro případ turbínové mříže lze odvodit z nerovnosti:

$$\frac{w_2}{w_1} \geqslant 1 \ .$$

Z tvaru optimálního rychlostního trojúhelníka pro axiální turbínové stupně plyne:

$$c_{1u} - u \leqslant u$$
$$c_1 \cos\alpha_1 - u \leqslant u$$
$$\frac{\cos\alpha_1}{2} \leqslant \frac{u}{c_1} \qquad \text{(f).}$$

Obdobně lze pro stupeň pracovního stroje přímo odvodit:

$$1 = \frac{l_u}{l_u} = \frac{l_u}{u \cdot c_{2u}} \ .$$

Při proudění stupněm pracovního stroje je sledovanou veličinou rychlost w_1, která přímo ovlivňuje aerodynamiku profilu, a nikoliv c_2, proto bude praktičtější, když poslední rovnice bude upravena jako funkce rychlosti w_1:

$$c_{2u} = w_{2u} - u$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{c_a}{w_{2u}} \rightarrow w_{2u} = \frac{c_a}{\operatorname{tg}\beta_2}$$
$$c_a^2 = w_1^2 - u^2$$
$$\beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta$$
$$\operatorname{tg}\beta_2 = \operatorname{tg}(\beta_1 + \Delta\beta) = \frac{\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\Delta\beta}{1 - \operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{tg}\Delta\beta}$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{c_a}{u}$$

$$w_{2u}=\frac{c_a\left(1-\mathrm{tg}\beta_1\,\mathrm{tg}\,\Delta\beta\right)}{\mathrm{tg}\beta_1+\mathrm{tg}\,\Delta\beta}=\frac{c_a\left(1-\frac{c_a}{u}\,\mathrm{tg}\,\Delta\beta\right)}{\frac{c_a}{u}+\mathrm{tg}\,\Delta\beta}=\frac{c_a-\frac{c_a^2}{u}\,\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{\frac{c_a}{u}+\mathrm{tg}\,\Delta\beta}=$$

$$=\frac{u\cdot c_a-c_a^2\,\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{c_a+u\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}=\frac{u\cdot c_a-w_1^2\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta+u^2\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{c_a+u\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}\ .$$

$$c_{2u}=\frac{u\cdot c_a-w_1^2\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta+u^2\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{c_a+u\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}-u=$$

$$=\frac{u\cdot c_a-w_1^2\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta+u^2\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta-u\cdot c_a-u^2\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{c_a+u\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}=\frac{-w_1^2\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{c_a+u\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}\ .$$

$$1=-\frac{l_u}{u\dfrac{w_1^2\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{c_a+u\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}}=-\frac{l_u}{\dfrac{w_1^2\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{\frac{c_a}{u}+\mathrm{tg}\,\Delta\beta}}=-\frac{l_u}{\dfrac{w_1^2\cdot\mathrm{tg}\,\Delta\beta}{\mathrm{tg}\,\beta_1+\mathrm{tg}\,\Delta\beta}}\ .$$

Podstatné pro návrh je také to v jakých řádech se budou měnit otáčky respektive obvodová rychlost:

$$\cos\beta_1=\frac{u}{w_1}\rightarrow u=w_1\cos\beta_1\ .$$

Podklady pro konstrukci nomogramů

Zde popsaná konstrukce nomogramu [42.] pro aerodynamické zatížení axiálního turbínového stupně je pro $\alpha_1=13°$. (úhel vstupní absolutní rychlosti bývá obvykle větší jak $10°$ a menší než $20°$), v logaritmických souřadnicích, kde na svislé ose jsou velikosti vstupní absolutní rychlosti c_1 a na vodorovné obvodové rychlosti

u. V tomto diagramu jsou pak izopléty obvodové práce l_u a zakřivení proudu $\Delta\beta$ jako funkce c_1 a u.

Izopléta obvodové rychlosti bude přímka, protože tvar *Rovnice (d)* v logaritmických souřadnicích bude přímka:

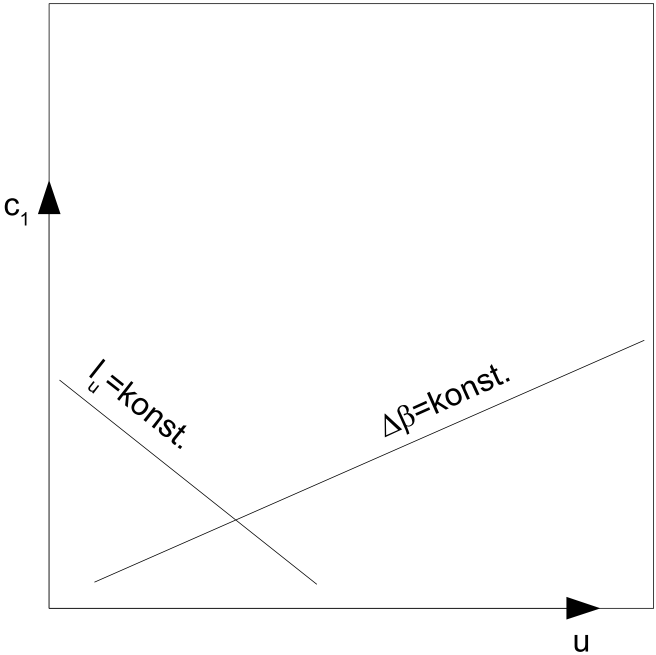
$$u \cdot c_1 \cos \alpha_1 = l_u \rightarrow \log u + \log(0{,}9743 \cdot c_1) = \log l_u \cdot$$

Tato přímka má zápornou směrnici, protože při růstu obvodové rychlosti musí klesat vstupní absolutní rychlost při konstantní obvodové práci.

Izopléta zakřivení proudu bude také přímka. Toto tvrzení o opřeno o tvar *Rovnice (e)* pro zakřivení proudu, ze které je očividné, že konstantní zakřivení bude při konstantním poměru obvodové a vstupní absolutní rychlosti. Tvar této přímky lze odvodit z následující rovnice:

$$\frac{u}{c_1} = K \rightarrow \log u - \log c_1 = \log K$$

kde *K* je konstanta, které se vypočítá pro požadovanou velikost zakřivení proudu *Δβ*.



Tvar nomogramu pro aerodynamické zatížení axiálního turbínového stupně.

Rozsah c_1 i u navrhuji od $1\ m{\cdot}s^{-1}$ do $1000\ m{\cdot}s^{-1}$. tj. rozdíl tří řádů, jestliže vzdálenost mezi řády bude *1* potom ostatní vzdálenosti na ose c_1 a u budou následující:

1~0,0000	2~0,3010	3~0,4771	4~0,6021
5~0,6990	6~0,7782	7~0,8451	8~0,9031
9~0,9542	10~1	[Tabulka 42.942]	

Souřadnice konstrukce izopléty $l_u=10\ J{\cdot}kg^{-1}$ budou následující:

Osu u protíná tato izopléta:

$$u = \frac{l_u}{c_1 \cdot \cos\alpha_1} = \frac{10}{\cos 13°} = 10{,}263\,m \cdot s^{-1}\ .$$

Osu rychlosti c_1 protíná:

$$c_1 = \frac{l_u}{u \cdot \cos\alpha_1} = \frac{10}{\cos 13°} = 10{,}263\,m \cdot s^{-1}\ .$$

Na ose c_1 nebo u tato hodnota odpovídá vzdálenosti $\log 10{,}263 = 1{,}0113$.

Všechny izopléty l_u budou s touto izoplétou rovnoběžné. Takže izopléta o řád vyšší $l_u = 100\ J \cdot kg^{-1}$ bude protínat osy c_1 při $102{,}6304\ m \cdot s^{-1}$ respektive osu u při $102{,}6304\ m \cdot s^{-1}$.

Na ose c_1 nebo u tato hodnota odpovídá vzdálenosti $\log 102{,}6304 = 2{,}0113$.

Hodnoty mezi $l_u = 10\ J \cdot kg^{-1}$ a 100 $J \cdot kg^{-1}$ se vypočítají obdobně viz následující tabulka:

l_u	c_1; u	log	l_u	c_1; u	log
10	10,263	1,0113	60	61,5783	1,7894
20	20,5261	1,33123	70	71,8413	1,8564
30	30,7891	1,4884	80	82,1043	1,9144
40	41,0522	1,6133	90	92,3674	1,9655
50	51,3152	1,71025	100	102,6304	2,0113

zde důkaz že posub o 5 na obě strany udělá chybu přibližně......