

31. ZÁKLADNÍ ROVNICE KLIKOVÉHO MECHANISMU PARNÍHO MOTORU

Jiří Škorpík, ORCID: 0000-0002-3034-1696, skorpik.jiri@email.cz

Úvod 1

Poloha pístu jako funkce pootočení hřídele 1

Síly působící na klikový mechanismus 2

- Výpočet sil působících na klikový mechanismus 2
- Zachytávání sil v klikovém mechanismu 3
- výpočet sil působících na klikový mechanismus pístu parního motoru [Ú.767] 4
- výpočet sil působících na klikový mechanismus šoupátka parního motoru [Ú.769] 4

Kroutící moment a ztráty v klikovém mechanismu 4

- výpočet výstupního kroutícího momentu hřídele [Ú.776] 5

Nerovnoměrnost chodu klikového mechanismu 6

- Součinnost setrvačnicku a soustrojí 6
- výpočet nerovnoměrnosti chodu a návrh velikosti setrvačnicku [Ú.785] 7

Odkazy 7

Přílohy 8

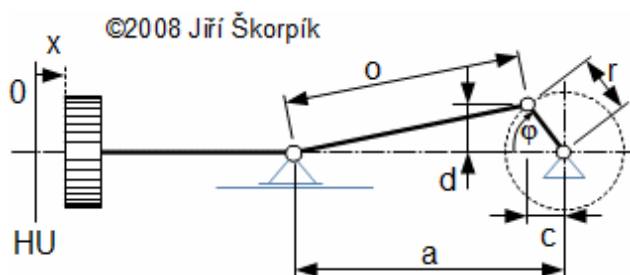
- 347 Odvození rovnic pro výpočet sil působících na klikový mechanismus 8
- 559 Odvození rovnic pro polohu pístu vzhledem k jeho horní úvrati 9
- 764 Odvození rovnic pro výpočet sil působících na vedení pístní tyče 9
- 767 Řešení úlohy 9
- 768 Odvození rovnice pro přepočet polohy pístu vyjádřený v procentech na odpovídající hodnotu pootočení hřídele 11
- 769 Řešení úlohy 11
- 774 Odvození rovnice kroutícího momentu od sil působících na píst 12
- 776 Řešení úlohy 13
- 784 Odvození rovnic úhlové rychlosti soustrojí, ve kterém je pracovní stroj s lineární charakteristikou příkonu 14
- 785 Řešení úlohy 16

Úvod

Pro dimenzování hlavních částí pístového parního motoru a jeho klikového mechanismu je nezbytné stanovit, rovnici polohy pístu, síly působící na píst, kroutící moment na hřídeli a rovnoměrnost chodu takového mechanismu.

Podkladem pro výpočet je konstrukce pístové skupiny motoru a tlaky pod a nad pístem, respektive jeho p-V diagram.

Klikový mechanismus převádí přímočarý vratný pohyb pístu na pohyb rotační a obráceně. Mechanismus obsahuje píst s pístní tyčí, ojnicí, kliku a hřídel, viz *Obrázek 555*.



558 Kinematická vazba pístu a klikového mechanismu

x [m] poloha pístu v závislosti na pootočení hřídele – aktuální vzdálenost pístu od jeho horní úvrati; o [m] délka ojnice pístu; r [m] rameno kliky; φ [°] pootočení hřídele.

• • •

Poloha pístu jako funkce pootočení hřídele

První rovnicí, kterou je potřeba sestavit je rovnice pro určení polohy pístu, kterou lze uvést jako funkce času nebo praktičtěji jako funkci úhlu pootočení hřídele, viz *Rovnice 559*. Úhel pootočení hřídele je ale sám funkcí času – tuto funkci lze odvodit z otáček hřídele.

$$x = o + r - \sqrt{o^2 - (r \cdot \sin \varphi)^2} - r \cdot \cos \varphi$$

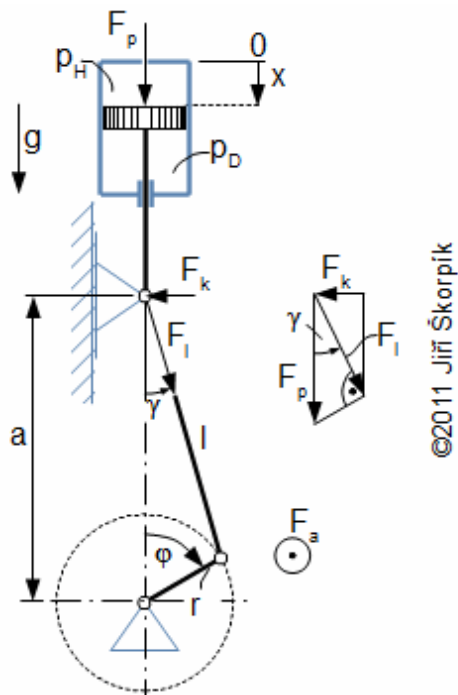
559 *Rovnice polohy pístu spojeného s klikovým mechanismem*

Odvození rovnic je uvedeno v *Příloze 559*, s. ??.

• • •

Síly působící na klikový mechanismus

Na píst, respektive mechanismus zajišťující pohyb pístu, působí síly od tlaku páry a setrvačné síly, jak ukazuje *Obrázek 346*. Tyto síly musí být vhodně zachyceny konstrukcí mechanismu.



©2011 Jiří Škorpič

346 Znárodnění sil působících na klikový mechanismus jako funkce pootočení hřídele φ

p_H [Pa] tlak páry na pístem; p_D [Pa] tlak páry pod pístem; F_p [N] výsledná síla působící na klikový mechanismus ve směru posuvu pístu; F_k [N] síla působící na vodítko pístní tyče; F_a [N] síla působící na mechanismus v axiálním směru (ve směru osy hřídele); F_I [N] síla působící na ojnice; g [$m \cdot s^{-2}$] gravitační zrychlení. Modrá barva označuje vazby, které zachytávají síly.

• Výpočet sil působících na klikový mechanismus

Z posledního obrázku lze odvodit rovnice silové rovnováhy klikového mechanismu, přitom *Vzorce 347* popisují síly působící na mechanismus ve směru posuvu pístu a *Vzorce 764* popisují síly působící na mechanismus kolmo na směr posuvu pístu (z pohledu *Obrázku 346* se jedná o sílu působící na vodítko pístní tyče). Axiální

síla F_a by u ideálního klikového mechanismu neměla vznikat, ale vzniká v důsledku nesouososti čepů mechanismu – při běžné přesnosti výroby a seřízení je tato síla o řád až dva menší než síly ve dvou hlavních směrech.

$$F_p = F_H - F_D + F_s + F_g$$

$$F_H = \frac{\pi \cdot d^2}{4} p_H; \quad F_D = \frac{\pi}{4} [(d^2 - d_T^2) p_D + d_T^2 \cdot p_{at}];$$

$$F_s = -k \cdot m; \quad k = \omega^2 \cdot R \left[\cos \varphi + \frac{r}{l} \cos 2\varphi \right];$$

$$F_g = g \cdot m$$

347 Rovnice pro výpočet sil působících na klikový mechanismus ve směru posuvu pístu

F_H [N] výsledná síla působící na píst od tlaku páry v horní komoře; F_D [N] výsledná síla působící na píst od tlaku páry v dolní komoře; F_s [N] setrvačná síla posuvných hmot, které jsou v propojeny mechanicky s pohybem pístu (smykadlo, pístní tyč, ojnice...); F_g [N] výslednice tíhových síly působící na mechanismus (hmotnost pístu, pístní tyče, ojnice, hmotnost plynu...); d [m] průměr válce; p_{at} [Pa] tlak atmosférický (skříň zalomené hřídele); d_T [m] průměr pístní tyče; k [$m \cdot s^{-2}$] zrychlení posuvných hmot mechanismu (rovnice při zanedbání, některých nevýznamných členů, plný tvar rovnice je v příloze); m [kg] hmotnost posuvných hmot (v případě výpočtu tíhy se započítává hmotnost celého mechanismu; v případě výpočtu setrvačných sil se počítají jen hmoty, které se posouvají ve směru posuvu pístu – ojnice nekoná posuvný pohyb, ale pohyb kombinovaný, proto se do setrvačných posuvných hmot zahrnuje pouze 1/3 hmotnosti ojnice); ω [$rad \cdot s^{-1}$] úhlová rychlost otáčení hřídele. Rovnice sil působících na píst jsou odvozena v *Příloze 347*, s. ??.

$$F_k = F_I \cdot \sin \gamma; \quad F_I = F_p \cdot \cos \gamma;$$

$$\gamma = \arcsin \left(\frac{r}{l} \sin \varphi \right)$$

764 Rovnice pro výpočet sil působících kolmo na směr posuvu pístu (na vedení pístní tyče)

F_I [N] síla působící v ojnici; γ [°] úhel, který svírá ojnice se směrem pohybu pístu. Pro malé úhly γ cca do 20° je $\cos \gamma$ větší jak 0,9 a síla F_I je téměř totožná se silou F_p . Odvození rovnic pro síly působící na vedení pístní tyče jsou uvedeny v *Příloze 764*, s. ??.

Obecně platí, že se zvyšujícími se otáčkami roste vliv setrvačných sil a klesá

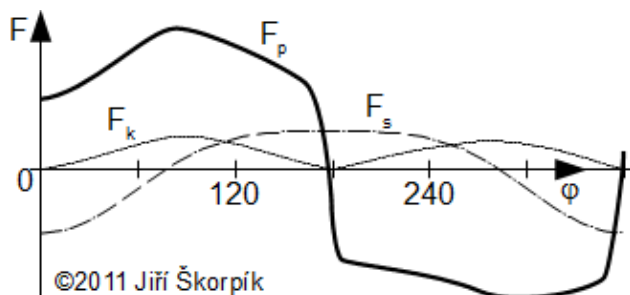
vliv sil od tlaku páry. Pro vyšetření setrvačných sil je musíme znát úhlovou rychlost otáčení hřídele. Obvykle se uvažuje jako konstantní, ale ve skutečnosti se mění, viz kapitola *Nerovnoměrnost chodu soustrojí*, s. ???. Pokud je nerovnoměrnost chodu velká je nutné změny úhlové rychlosti započítat.

Výpočet těchto sil slouží ke stanovení namáhání jednotlivých částí mechanismu, dimenzování ložisek apod. Při výpočtu těchto sil se vychází z navrženého nebo naměřeného p - V diagramu motoru, tyto diagramy se z praktických důvodů uvádí v procentech objemu p - V [%], respektive v procentech okamžité polohy pístu p - x [%]. Pro takový případ je nutný přepočítání na odpovídající pootočení hřídele. Vzorce pro tento přepočítání není složité odvodit za pomoci výše uvedených vzorců, viz *Vzorec 768*.

$$\varphi = \arccos \left[\frac{r^2 + \left(o + r - \frac{r}{50} x_{\%} \right)^2 - o^2}{2 \cdot r \left(o + r - \frac{r}{50} x_{\%} \right)} \right]$$

768 Přepočítání polohy pístu vyjádřený v procentech na odpovídající hodnotu pootočení hřídele
Odvození této rovnice je uvedeno v *Příloze 768*, s. ??.

Odtud lze sestavit graf závislosti jednotlivých sil na poloze pístu, ze kterého lze vycházet při pevnostních výpočtech motoru a zatěžování ložisek, viz *Obrázek 766*, s. ??.



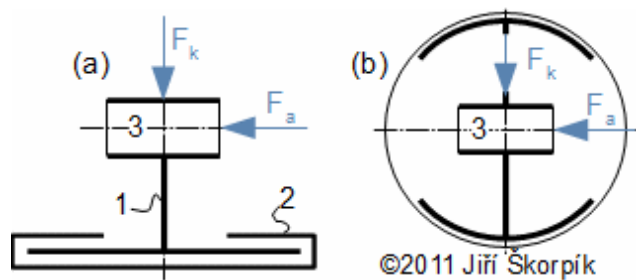
766 Průběh jednotlivých sil jako funkce pootočení hřídele

Jedná se o typický průběh jednotlivých sil pro otáčky 1 500 min⁻¹.

• Zachytávání sil v klikovém mechanismu

Síly ve směru posuvu jsou zachytávány radiálními ložisky hřídele, síly kolmé na posuv pístu (včetně axiálních sil) zachytává vedení pístní tyče, axiální ložisko hřídele a píst – klikový mechanismus lze konstruovat i bez pístní tyče a ojnice je spojena přes čep přímo s pístem (to je možné například u jednočinných motorů podobně jako u spalovacích motorů). Vedení pístní tyče může být jednostranné i oboustranné (křížák, viz *Obrázek 765b*).

U jednostranného vedení (*Obrázek 765a*) mohou být otáčky motoru pouze jedním směrem, a to takovým, aby výslednice sil působila vždy jedním směrem. Ale i v případě otáček pouze v jednom smyslu v některých případech (po započtení setrvačných sil a různých ztrát, které ovlivňují kroutící moment na hřídele) působí síla v jisté fázi otočení hřídele i v opačném směru. Tato síla bývá mnohem menší než síla působící kolmo na styčnou plochu smykadla. Proto každé vedení pístní tyče musí být opatřeno oboustranným vedením, viz *Obrázek 765*, s. ??.



765 Základní způsoby vedení pístní tyče

(a) ploché vodítko; (b) válcové vodítko. 1 smykadlo; 2 vodící lišty; 3 otvor pro čep pístní tyče. Podrobné řešení např. [1].

Vedení pístní tyče klouže po smykadle, které má určitou plochu a je intenzivně mazáno, aby nedocházelo k velkému tření, což by vedlo k vysokým mechanickým ztrátám motoru a opotřebení.

V některých případech (především u pístové skupiny bez pístní tyče, kdy boční

síly zachytává píst) bývá osa čepu ojnice posunuta od osy hřídele [4]. Tím lze zmírnit extrémny průběhu bočních sil – změni se samozřejmě i tvar *Rovnic 347* a *Rovnic 764* na s. 2.

Úloha 767

Vypočítejte síly F_p , F_s a F_k v důležitých okamžicích p-V diagramu. Jestliže máte k dispozici p-V diagram z Úlohy 573 uvedené v kapitole 29. Vnitřní výkon pístového parního motoru, rozměry mechanismů včetně válce a jejich hmotnosti a otáčky hřídele. Vliv gravitačního zrychlení zanedbejte. Řešení úlohy je uvedeno v *Příloze 767*, s. ??.

Stejně nebo jen mírně upravené rovnice lze použít při vyšetřování sil působící na jakýkoliv klikový mechanismus, například šoupátka motoru, viz *Úloha 769*.

Úloha 769

Vypočítejte síly působící na šoupátka F_p , F_s a F_k v důležitých okamžicích p-V diagramu Úlohy 573 uvedené v kapitole 29. Vnitřní výkon pístového parního motoru. Jestliže máte k dispozici p-V diagram, rozměry mechanismů včetně šoupátka a jejich hmotnosti a otáčky hřídele. Vliv gravitačního zrychlení zanedbejte. Mechanismus šoupátka je popsán v článku 30. Vyšetření pohybu a rozměrů šoupátka.

• • •

Kroutící moment a ztráty v klikovém mechanismu

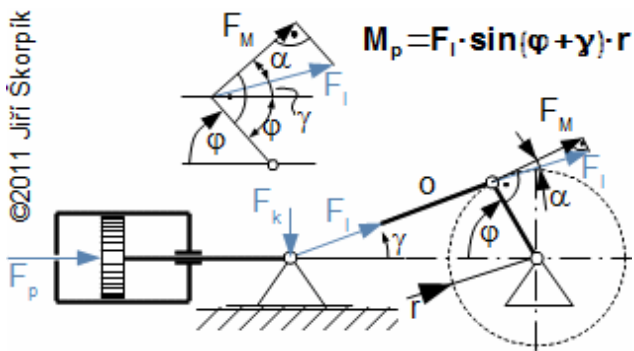
Kroutící moment (jeho průběh v závislosti na pootočení hřídele) přenášený na hřídel motoru, respektive indikovaný na jeho výstupním konci je součtem momentů vznikající v klikovém mechanismu od několika sil. Těmito silami je výslednice sil F_p působící na písty, které jsou propojené s hřídelí, setrvačné hmoty ostatních mechanismů, které jsou přes hřídel poháněny (pohon rozvodů páry, pohon regulace otáček a pod.) a energetické ztráty třením [2, s. 321] připojených mechanismů (tření v ložiscích, uložení pístní tyče, pístní kroužky o válec a pod.), viz *Vzorec 773*. Zjednodušujícím předpokladem této kapitoly je, že otáčky motoru jsou konstantní a není proto nutné počítat s kroutícím momentem vznikající v důsledku setrvačných sil rotujících částí motoru, viz následující kapitola.

$$M_k(\varphi) = \underbrace{\sum M_p(\varphi)}_{(a)} + \underbrace{\sum M_{sm}(\varphi)}_{(b)} + \underbrace{\sum M_z(\varphi)}_{(c)}$$

773 *Kroutící moment na výstupním hřídeli motoru*
 M_k [N·m] kroutící moment na výstupním konci motoru; **a** [N·m] výsledný kroutící moment od jednotlivých pístů; **b** [N·m] výsledný kroutící moment od setrvačných sil dalších mechanismů propojených s hřídelí (například mechanismus šoupátka, reg. mechanismi apod); **c** [N·m] výsledný kroutící moment způsobený třením v mechanismech propojených s hřídelí. Momenty působící ve směru otáčení hřídele jsou kladné, momenty v opačném směru jsou záporné.

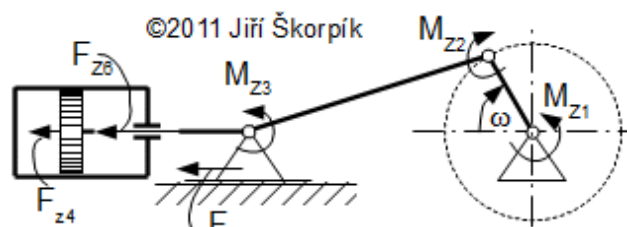
Jednotlivé momenty lze získat z rozkladu sil v klikovém mechanismu podle *Obrázku 774*.

Kroutící moment od sil vznikající při tření pohyblivých částí mechanismů se vypočítává podle typu ztrát. Hlavní třecí ztráty vznikají při přímočarém vratném pohybu (například pístní tyče o její ucpávky, tření vodítka o jeho vedení...) a v ložiscích, jak hlavních ložisek hřídele, tak v ložiscích ojnic, viz *Obrázek 775*.



774 Výpočet krouticího momentu od sil působící na píst

Stejným způsobem lze vypočítat krouticí moment od setrvačných hmot dalších mechanismů spojených s hřídelí jako je například pohon rozvodů páry parního motoru apod. Modře jsou označeny síly, které už byly počítány v předchozí kapitole. Odvození této rovnice je uvedeno v Příloze 774, s. ??.



$$P_z = P_m - P_i = \omega \cdot M_z$$

$$M_z = M_{z1} + M_{z2} + M_{z3} + M_{z4}(F_{z4}) \dots \quad \frac{P_m}{P_i} = \eta_m$$

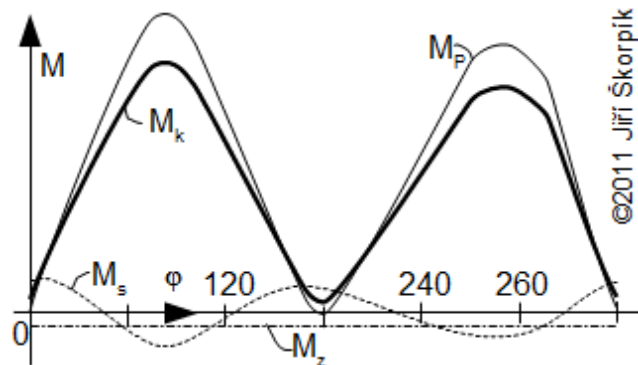
775 Význačení třecích sil a momentů v klikovém mechanismu a jejich vliv na přenášený výkon M_{z1} [N·m] třecí moment vznikající třením v hlavních ložiscích hřídele; M_{z2} [N·m] třecí moment vznikající třením v ojnicích ložiscích; M_{z3} [N·m] třecí moment vznikající třením v ojnicích čepech; F_{z4} [N] třecí síla vznikající při tření pístních kroužků a pístu o válec; F_{z5} [N] třecí síla vznikající třením vedení pístní tyče; F_{z6} [N] třecí síla vznikající při tření pístní tyče o ucpávky. P_m [W] mechanický výkon klikového mechanismu na konci hřídele; P_i [W] vnitřní výkon motoru; P_t [W] třecí výkon mechanismu způsobený třecími ztrátami v klikovém mechanismu; η_m [-] mechanická účinnost klikového mechanismu.

Třecí síla F_{z4} (tření ve válci) působí proti pohybu a na třecí krouticí moment se přepočítá stejným způsobem jako síla působící na píst uvedená v Rovnici 774.

Výpočet ztrátového momentu M_z se provádí ze stykových sil působících v ložisku a dalších kluzných plochách, olejové

mezeře, vlastnosti maziva a kluzných ploch. Je zřejmé, že bude závislé i na pootočení hřídele, protože sledované síly se mění. Při základním návrhu klikového mechanismu, respektive stanovení výsledného krouticího momentu M_k lze postupovat i obráceně a ztrátový moment vypočítat z odhadu mechanické účinnosti klikového mechanismu. Z něj lze alespoň přibližně stanovit střední hodnota ztrátového momentu.

Odtud lze sestavit graf závislosti jednotlivých momentů na poloze pístu, respektive pootočení hřídele jako na Obrázku 777, ze kterého lze vycházet při dimenzování klikového mechanismu.



777 Průběh jednotlivých momentů jako funkce pootočení hřídele

φ [°]. Jedná se o klikový mechanismus jednoválcového dvojcínného parního motoru s jedním šoupátkem. Zde je ztrátový moment pro zjednodušení uváděn jako konstanta.

Úloha 776

Vypočítejte krouticí moment na hřídeli klikového mechanismu. Rozměry mechanismů, síly působící na píst a šoupátko a setrvačné síly jsou stejné jako u Úlohy 767 a Úlohy 769. Předpokládejte mechanickou účinnost klikového mechanismu 90 %. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 776, s. ??.



Nerovnoměrnost chodu klikového mechanismu

Mechanický výkon na hřídeli motoru je odváděn ke spotřebiči mechanického výkonu, kterým nejčastěji el. generátor, ale může jim být i čerpadlo nebo jiný pracovní stroj. Zároveň musí platit energetická rovnováha mezi prací motoru a prací pracovního stroje. Práce vykonaná motorem za jednotku času je závislá na průběhu kroutícího momentu M_k během sledovaného časového úseku, mění se tedy v průběhu jedné otáčky motoru i předávaný výkon.

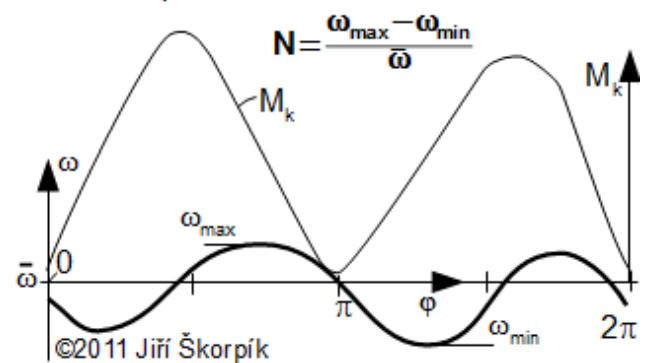
Příkon většiny typů pracovních strojů je funkcí otáček, respektive úhlové rychlosti a při změně výkonu motoru se musí změnit i úhlová rychlost soustrojí tzv. regulace pracovního stroje otáčkami. Úhlová rychlost soustrojí bude klesat nebo narůstat proti střední úhlové rychlosti $\bar{\omega}$ podle toho, jaká bude okamžitá výkonová bilance mezi motorem a pracovním strojem. Poměr velikosti rozdílu mezi maximální a minimální úhlovou rychlostí ku střední úhlové rychlosti se nazývá nerovnoměrnost chodu [3, s. 35], viz *Vzorec 783*.

Předchozí kapitoly a úlohy pracovaly s odhadem otáček motoru n respektive odhadem střední úhlové rychlosti $\bar{\omega}$. Pomocí této kapitoly lze ověřit jak moc se tento odhad bude lišit od skutečnosti. Dobře odhadnuté otáčky by se od těch vypočítaných odlišují jen nevýznamně. V opačném případě je nutné otáčky lépe odhadnout a celý návrh motoru až po tuto část provést znovu.

Velká změna úhlové rychlosti během otáčky může mít nepříznivý vliv na namáhání konstrukce soustrojí popřípadě práci pracovního stroje, například pro pohon čerpadel se doporučuje nerovnoměrnost chodu max kolem $1/20$

pro pohon el. generátorů střídavého proudu až $1/300$. Pro plynulost chodu je nutné zvětšit moment setrvačnosti hřídele soustrojí, respektive instalovat na hřídel motoru setrvačnick, který zvýší moment setrvačnosti hřídele soustrojí, přenáší kliku přes mrtvé polohy, zmenší nerovnoměrnosti otáčení motoru v rámci jedné otáčky, při náhlém výpadku zatížení motoru se motor pomaleji roztočí (snížení požadavku na rychlost uzavření páry při výpadku zatížení) popřípadě strvačnick pomáhá překonávat náhle velké odpory (lis apod.).

$$P_m(\omega) = P_{sp}(\omega) + P_{zt} + P_s \Rightarrow \omega \neq \text{konst.}$$



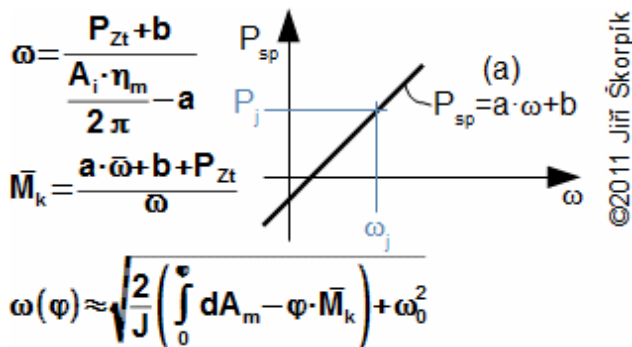
783 Jestliže příkon pracovního stroje je funkcí úhlové rychlosti, bude se během otáčky motoru měnit i úhlová rychlost hřídele soustrojí

P_{sp} [W] užitečný příkon pracovního stroje; P_s [W] výkon rotačních hmot (změna kinetické energie rotačních hmot za jednotku času – při $\omega = \text{konst.}$ je $P_s = 0$ W); P_{zt} [W] ztráty mimo motor (ztráty ve spojce, generátoru...); $\bar{\omega}$ [rad·s⁻¹] střední úhlová rychlost, při kterém střední kroutící moment motoru $M_{k,r}$ vykoná během jedné otáčky motoru stejné množství práce E_m jako při skutečné proměnlivé úhlové rychlosti vykoná kroutící moment M_k ; n [s⁻¹] otáčky motoru; N [-] nerovnoměrnost chodu; φ [rad].

• Součinnost setrvačnicku a soustrojí

Velikost setrvačnicku, respektive jeho momentu setrvačnosti [2, s. 258] se vypočítá z požadované nerovnoměrnosti chodu. Obvykle se postupuje iteračně tak, že se nejdříve odhadne moment setrvačnosti rotačních hmot a odtud vypočítá průběh úhlové rychlosti během jedné otáčky ze známého průběhu

kroučícího momentu a konkrétní výkonové charakteristiky pracovního stroje. Následně se vypočítá nerovnoměrnost chodu. Pokud nerovnoměrnost chodu není v požadovaném rozsahu výpočet se opakuje pro korigovaný moment setrvačnosti setrvačných hmot.



784 Příklad rovnic pro výpočet úhlové rychlosti pro případ lineární příkonové charakteristiky spotřebiče (asynchronní generátor)

(a) charakteristika spotřebiče (asynchronní generátor). P_j [W] jmenovitý výkon el. generátoru; ω_j [rad·s⁻¹] jmenovitá úhlová rychlost el. generátoru; J [kg·m²] moment setrvačnosti hřídele soustrojí (včetně setrvačnicku); A_m [J] indikovaná práce na výstupním konci hřídele motoru; ω_0 [rad; °] úhlová rychlost hřídele při $\varphi=0^\circ$. Při odvozování těchto rovnic byly použity různé zjednodušující předpoklady, které omezují jejich platnost pouze na nízké hodnoty rovnoměrnosti chodu N . Uvedené rovnice jsou tím přesnější, čím menší je nerovnoměrnost chodu. Odvození této rovnice je uvedeno v Příloze 784, s. ??.

Úloha 785

Vypočítejte potřebný moment setrvačnosti rotoru soustrojí, jestliže znáte kroučící moment na výstupní hřídeli motoru i moment setrvačnosti hřídele soustrojí. Jedná se o motor jako v předchozích úlohách. Motor pohání asynchronní el. generátor, jehož jmenovitý výkon je 15 kW, jmenovité otáčky 1 545 min⁻¹ a nulového výkonu dosahuje při otáčkách 1 500 min⁻¹. Ztrátový výkon generátoru je 1 500 W. Požadovaná rovnoměrnost chodu je 1/300.

• • •

Odkazy

- [1] KLÁG, Josef. *Parní stroje a turbíny-Obsluha a provoz*, 1952. 1. vydání. Praha: ROH-práce-vydavatelství knih.
- [2] HORÁK, Zdeněk. KRUPKA, František, ŠINDELÁŘ, Václav. *Technická fyzika*, 1961. 3. vydání. Praha: SNTL.
- [3] KRUTINA, Jaroslav. *Přehled technické mechaniky*, 1954. Vydání 1. Praha: ROH – PRÁCE.
- [4] KOŽOUŠEK, Josef. *Výpočet a konstrukce spalovacích motorů II*, 1983. Vydání první. Praha: SNTL, 488 stran.

Bibliografická citace článku

ŠKORPÍK, Jiří. Základní rovnice klikového mechanismu parního motoru, *Transformační technologie*, 2011-08, [last updated 2020-04]. Brno: Jiří Škorpík, [on-line] pokračující zdroj, ISSN 1804-8293. Dostupné z <https://www.transformacni-technologie.cz/31.html>.