
MACHOVO ČÍSLO A JEVY PŘI PROUDĚNÍ VYSOKÝMI RYCHLOSTMI

- strana 3.3 – **Základní pojmy v proudění vysokými rychlostmi**
 - strana 3.4 – **Dopady konečné velikosti rychlosti zvuku na kontinuitu proudu**
 - strana 3.7 – **Kolmá (přímá) rázová vlna**
 - **Úloha 896:** – Výpočet ztráty v kolmé rázové vlně vzniklé v Lavalově trysce
 - **Úloha 862:** – Výpočet polohy rázové vlny v trysce, viz čl. 4.
 - strana 3.9 – **Šikmá rázová vlna**
 - **Úloha 1007:** – Výpočet parametrů šikmé rázové vlny
 - strana 3.10 – **Nedosažitelné kompresní vlny**
 - strana 3.12 – **λ -rázová vlna**
 - strana 3.13 – **Expanzní vlny**
 - strana 3.14 – **Vliv vysokých rychlostí na aerodynamiku profilu**
 - strana 3.17 – **Aerodynamika profilových mříží ve stlačitelném prostředí**
 - strana 3.18 – **Odkazy**
 - strana 3.19–3.27 – **Přílohy**
-

- **autor:** – ŠKORPÍK, Jiří ([LinkedIn.com/in/jiri-skorpik](https://www.linkedin.com/in/jiri-skorpik))
- **datum vydání:** – Leden 2006, Únor 2023, Únor 2026 (3. vydání)
- **název:** – Machovo číslo a jevy při proudění vysokými rychlostmi
- **web:** – *fluid-dynamics.education*
- **provenience:** – Brno (Česká republika)
- **email:** – skorpik.jiri@email.cz

Copyright©Jiří Škorpík, 2006-2026
Všechna práva vyhrazena.

Základní pojmy v proudění vysokými rychlostmi

Při proudění tekutin rychlostmi V výrazně nižšími než je rychlost zvuku a očekáváme, jako pozorovatelé, jisté chování této tekutiny při obtékání těles. Typickým projevem podzvukového proudění je plynulá změna trajektorii proudu již před obtékaným tělesem jako na **Obrázku 520**. Za toto chování může zvuk jako tlaková porucha šířící kontinuem ze zdroje-z tlakové poruchy, kterými je povrch obtékaných těles. To znamená, že při nadzvukovém proudění je nemožné, aby se změny tlaku a dalších stavových veličin šířily proti směru proudění. Z toho důvodu sledujeme zásadní rozdíly mezi šířením tlakové poruchy v podzvukovém, zvukovém nebo nadzvukovém proudu v kanálech nebo při obtékání těles a vzniku speciálních jevů (rázové a expanzní vlny), které při podzvukových rychlostech nevznikají. Poměr V ku a se označuje Machovo číslo.

– **520:** –  S-zdroj tlakové poruchy (source).
Podzvukové obtékání

Machovo číslo

Machovo číslo je definováno jako poměr rychlosti tekutiny V ku rychlosti šíření zvuku v tekutině a (**Vzorec 337**). Rychlost zvuku a je funkcí složení tekutiny a teploty.

– **337:** –
$$M = \frac{V}{a}; \quad a = \sqrt{\kappa \cdot r \cdot T} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

a [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] rychlost šíření zvuku ve vyšetřovaném kontinuu; M [Mach] Machovo číslo; p [Pa] tlak; r [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$] individuální plynová konstanta; T [K] absolutní teplota plynu (statická teplota); V [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] rychlost tělesa nebo proudění; ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$] hustota; κ [1] poměr tepelných kapacit. Odvození rovnice pro rychlost zvuku je v **Příloze 337**.

Kritické Machovo číslo

Hodnota Machova čísla se ve vyšetřovaném objemu může měnit, tak jak se lokálně mění rychlosti tekutiny a zvuku. Například tekutina obtékající profil na **Obrázku 520** má jinou rychlost před profilem a jinou v okolí profilu. To znamená, že na vtoku tekutiny do vyšetřovaného objemu mohou být Machova čísla jiná než v některých bodech vyšetřovaného objemu. Definujeme-li na vtoku do vyšetřovaného objemu referenční bod, ve kterém stanovíme Machovo číslo, tak můžeme i určit kritickou hodnotu Machova čísla v tomto bodě, při které uvnitř vyšetřovaného objemu tekutiny dosáhne někde i zvukové rychlosti čili $M=1$. Kritické Machovo číslo je menší než 1 ($M<1$), jestliže ve vyšetřovaném objemu dochází k růstu rychlostí, a větší než 1 ($M>1$), jestliže ve vyšetřované oblasti dochází k poklesu rychlosti (například u difuzorů).

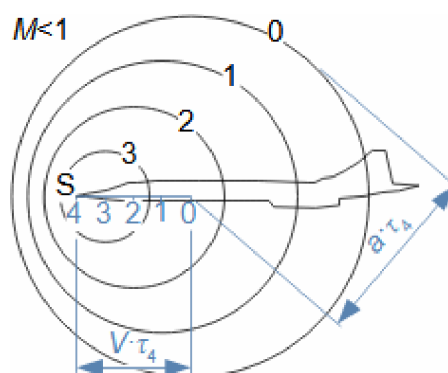
Dopady konečné velikosti rychlosti zvuku na kontinuitu proudu

Pomocí zvuku jako tlakovou poruchou se kontinuem šíří informace o velikosti těles ve vyšetřovaném objemu. To umožňuje, při podzvukovém proudění, proudnicím reagovat na obtékaná tělesa s předstihem jako na **Obrázku 520, s. 3.3**. Naopak, při nadzvukovém vzájemném pohybu tekutiny a tělesa k takovému předstihu nemůže dojít a toto těleso je nuceno svým objemem okolní tekutinu vytěsnit prudkou kompresí a změnit tak její směr skrz jev zvaný rázová vlna. Důsledkem konečné velikosti rychlosti zvuku je i "zrcadlová" změna vlastností proudění v kanálech při překročení rychlosti zvuku.

Podzvukové proudění
kolem obtékaných
těles

Tlaková porucha se v homogenním prostředí šíří v kulových plochách směrem od zdroje-S, tj. všemi směry stejnou rychlostí. Rozdíl tlaku na rozhraní neporušeného prostředí a zvukové vlny se zmenšuje s rostoucím poloměrem zvukové vlny (klesá její energetická hustota neboli intenzita zvuku), tím také klesá vliv zvukové vlny na okolní prostředí. Při pohybu zdroje tlakové poruchy ve směru pohybu zdroje tlakové poruchy roste gradient intenzity zvuku a naopak, viz **Obrázek 772**.

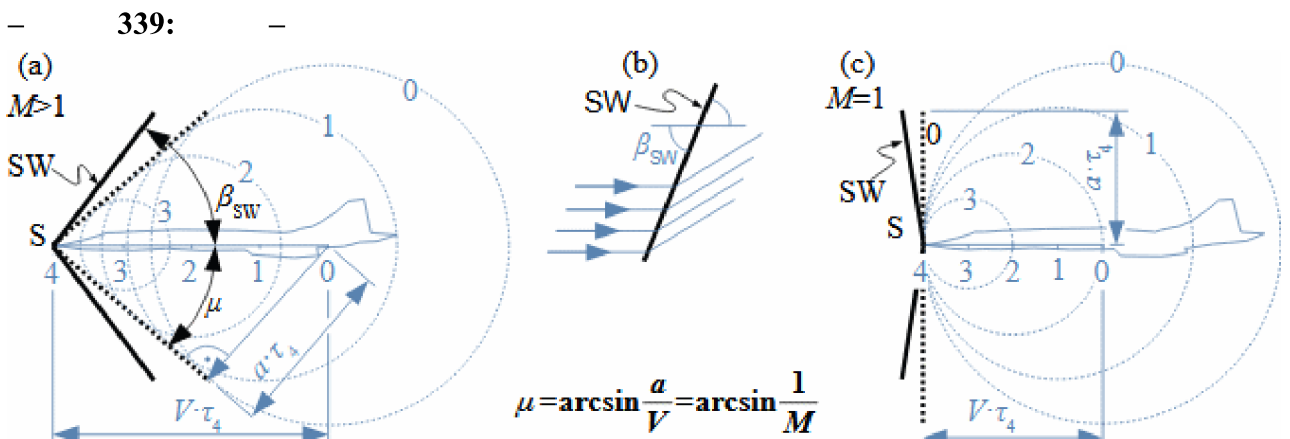
— 772: —
Šíření zvukových vln
při pohybu zdroje
tlakové poruchy



τ [s] čas. Kružnice 0, 1, 2, 3 představují hranici zvukových vln v prostředí v čase $\tau=0\dots3$. V čase 0 je zdroj právě na souřadnici 0 v čase 1 na souřadnici 1 atd. Tj. v bodě 0 vyvolá zdroj tlakovou poruchu, která se šíří rychlostí zvuku v kulové ploše, poté co urazí zdroj vzdálenost 0-S bude mít poloměr zvukové vlny označený na obrázku symbolem 0. Stejný postup platí i pro tlakovou poruchu vyvolanou zdrojem v bodě 1 atd.

*Nadzvukové proudění
kolem obtékaných
těles*

V případě nadzvukové rychlosti ($M \geq 1$) se proudnice před obtékaným tělesem nerozestupují a toto těleso je nuceno svým objemem okolní plyn vytěsnit prudkou kompresí – energie ke kompresi plynu je brána z pohybu tělesa. Takto zkomprimovaný plyn postupně expanduje směrem od tělesa. Hranici komprimovaného plynu má tvar kužele a nazývá se rázová vlna (**Obrázek 339a**). Sklon rázové vlny β_{SW} je vždy větší než úhel tzv. Machův úhel μ , který by vznikl při pohybu nekonečně tenkého tělesa.



(a) zdroj se pohybuje nadzvukovou rychlostí; (b) proudnice v okolí šikmé rázové vlny (porovnejte s **Obrázek 520**, s. 3.3); (c) zdroj se pohybuje zvukovou rychlostí. SW-rázová vlna (shock wave). β_{SW} [°] sklon rázové vlny ($\mu < \beta_{SW}$); μ [°] Machův úhel. Obrázek se nezabývá situací a velikostí rázových vln v čase před $\tau=0$ a ani situací za rázovou vlnou, tj. za obtékaným tělesem, tento problém je popsán v další části článku.

*Zvukové proudění
kolem obtékaných
těles*

V případě zvukových rychlostí ($M=1$) je čelo tlakových poruch neustále v místě zdroje. Machův úhel μ je 90° , proto úhel rázové vlny β_{SW} před reálným tělesem musí být větší jak 90° , viz **Obrázek 339c**.

*Princip relativity
proudění kolem
obtékaných těles*

Zatím bylo znázorněno šíření zvukových vln nebo vznik rázových vln při pohybu tělesa, ale stejného efektu je dosaženo i v opačném případě, kdy těleso je v klidu a je plynem obtékáno či kombinací.

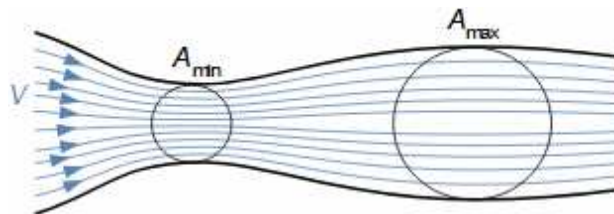
Rázová vlna

Oproti zvukové vlně je rázová vlna stálá skoková změna stavových veličin (za rázovou vlnou je vyšší tlak, teplota i hustota). Situaci lze přirovnat k expandující kouli stlačeného plynu s tím, že vlivem pohybu tělesa je kompresí další plyn doplňován. Nicméně objem kužele roste s třetí mocninou doby pohybu a množství komprimovaného plynu je lineární (při konstantní rychlosti), takže se vzdáleností od špičky kuželu rázové vlny klesá intenzita rázové vlny.

Změna vlastností proudění v kanálech při vysokých rychlostech

Rovnici, která predikuje vznik rázových vln při vysokých rychlostech proudění v kanálech publikoval v roce 1886 francouzský vynálezce, matematik a fyzik Pierre Henri Hugoniot (1851-1887), když se snažil popsat proudění v ústí dělových hlavních, viz **Rovnice 518**.

518:
Hugoniotova věta



$$\frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} (1 - M^2) = 0$$

A [m] průtočný průřez. Tato rovnice se označuje jako Hugoniotova věta nebo jako charakteristická rovnice proudění stlačitelné látky. Proudová trubice může být vytvořena pevnými stěnami nebo ostrou hranicí mezi dvěma prostředími s velmi odlišným stavem či vlastnostmi (kapalina versus plyn; řídký plyn versus rázová vlna na okraji apod.). Odvození Hugoniotovy věty je provedeno v **Příloze 518**.

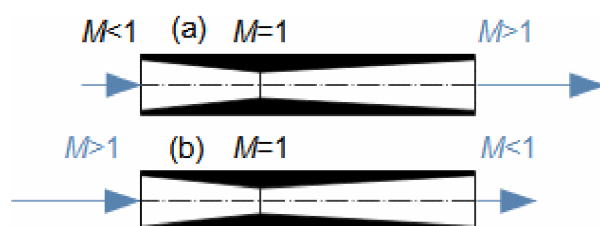
Proudění v kanále dosáhne rychlosti zvuku jen v jeho nejužším místě

Podle Hugoniotovy věty bude při podzvukové rychlosti na vstupu do zužující se trubice ($M < 1$) docházet k nárůstu rychlosti a naopak, takže lze stanovit i místo v trubici, kde může proudění dosáhnout právě rychlosti zvuku ($M = 1$), musí to být v místě lokálního extrému $dA/A = 0$. Jestliže ke snižování rychlosti nadzvukového proudu dochází pouze ve zužujícím se kanále, pak rychlosti zvuku lze dosáhnout pouze v nejužším místě kanálu. Pokud se tak stane, tak říkáme, že proudění dosáhlo v kanále kritické rychlosti V^* .

Rychlostní charakteristiky proudění v kanále při podzvukové a nadzvukové vtokové rychlosti

Chování nadzvukového proudění je tedy přesně opačné než proudění podzvukového, díky tomu dva tvarově totožné kanály na **Obrázku 868** fungují zcela odlišně při podzvukovém a nadzvukovém proudění na vstupu. Zobrazený kanál se chová jako nadzvuková tryska, jestliže do kanálu vstupuje podzvukové proudění (**Obrázek 868a**), které zvyšuje svou rychlost až na $M = 1$ v nejužším průřezu, za tímto průřezem se rychlost dále zvyšuje až na vysoce nadzvukovou výstupní rychlost. Naopak zobrazený kanál se chová jako nadzvukový difuzor, jestliže do kanálu vstupuje nadzvukové proudění, které snižuje svou rychlost na $M = 1$ v nejužším průřezu, za kterým se rychlost dále snižuje až na nízkou podzvukovou rychlost, tím se transformuje kinetická energie nadzvukového proudu na tlakovou energii.

868:



(a) Nadzvuková tryska, běžně nazývána jako Lavalova tryska; (b) nadzvukový difuzor.

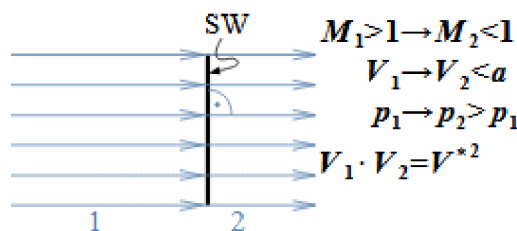
Rázové vlny při proudění v kanálech

Stroje, ve kterých může docházet k nadzvukovým rychlostem lze reálně konstruovat jen pro konkrétní podmínky (lze dokázat, že poměr výstupního průtočného průřezu ku minimálnímu průřezu musí být pro rozdílná Machova čísla také rozdílná), při změně podmínek by bylo nutné měnit geometrii stroje, aby splňoval požadavky na přechod proudění z nadzvukového do podzvukového. To často není možné splnit a přechod se uskuteční v rozšiřující se části proudové trubice skokem, tj. skokovou změnou stavových veličin tedy rázovou vlnou, jen tak lze splnit podmínky Hugoniotovy věty (plynulý přechod není v takovém kanále možný). Přičemž existuje několik základních druhů rázových vln podle podmínek, za jakých vznikly, viz následující kapitoly.

Kolmá (přímá) rázová vlna

*V kolmé rázové vlně se téměř skokově (tloušťka vlny je cca 10^{-7} m [Hloušek, 1992]) klesá beze změny směru rychlost na podzvukovou, tak jak je uvedeno na **Obrázku 519**. Změny stavových veličin v kolmé rázové vlně lze vypočítat pomocí Rankine-Hugoniotovy rovnic. Kolmé rázové vlny vznikají v kanálech a kolem osamocených těles při zvukové rychlosti proudu.*

– **519:** –
Průchod plynu kolmou rázovou vlnou

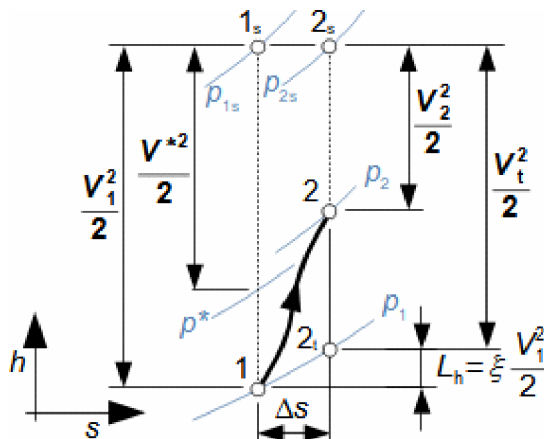


1-stav plynu před rázovou vlnou;
2-stav plynu za rázovou vlnou.
 p [Pa] tlak; V^* [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] kritická rychlost proudění. Odvození rovnic pro kolmou rázovou vlnu je provedeno například v [Macur, 2010, s. 372].

Změny stavových veličin

Energetickou bilanci kolmé rázové vlny s uspokojivým výsledkem při výpočtu změn stavových veličin poprvé stanovil německý fyzik Ludwig Prandtl (1875-1953) zavedením předpokladu, že při skokové změně stavových veličin v rázové vlně dochází i ke zvýšení entropie, což je dobře patrné z h - s diagramu rázové vlny na **Obrázku 338**, s. 338. To také znamená, že rázová vlna generuje termodynamickou ztrátu.

– **338:** –
 Změna stavu plynu
 při průchodu kolmou
 rázovou vlnou



h [$\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$] entalpie plynu;
 s [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$] entropie plynu;
 L_h [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$] ztráta v rázové vlně;
 p^* [Pa] kritický tlak (tlak, při kterém proudění při expanzi z bodu 1s dosáhne rychlosti zvuku); V_t [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] teoretická rychlost plynu při izoentropické expanzi z tlaku p_{2s} do tlaku p_1 ; ζ [1] poměrná ztráta rázem. Index $_s$ označuje celkový stav.

Rovnice pro změnu stavových veličin pro průchodu kolmou rázovou vlnou

Ztráta v rázové vlně nezávisí přímo na geometrii obtékaného tělesa, ale pouze na vlastnostech plynu a jeho rychlosti, což je patrné z Rankine-Hugoniotových rovnic pro stav plynu před a za vlnou, viz **Rovnice 333** a také z výpočtu **Úlohy 896**.

– **333:** –
 Rankine-
 Hugoniotovy rovnice

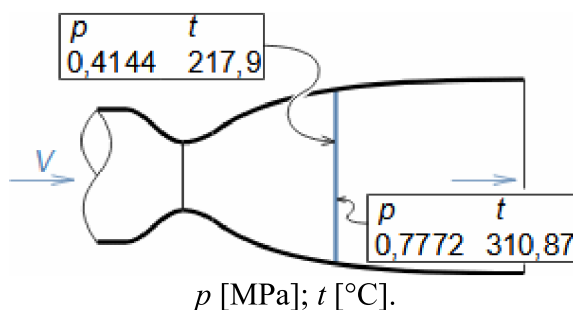
$$M_2^2 = \frac{\frac{\kappa-1}{2} M_1^2 + 1}{\kappa M_1^2 - \frac{\kappa-1}{2}}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Rovnice jsou odvozeny pro stabilní kolmou rázovou vlnu a ideální plyn. Odvození rovnic je provedeno v **Příloze 333**.

– **Úloha 896:** – V Lavalově trysce vznikla kolmá rázová vlna. Vypočítejte ztrátu při průchodu plynu touto vlnou. Naměřený tlak a teplota před a za vlnou jsou na přiloženém obrázku. Vypočítaná rychlost před vlnou z průřezu trysky a hmotnostního toku je $583,72 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Tryskou proudí suchý vzduch.

Řešení úlohy je uvedeno v **Příloze 896**.

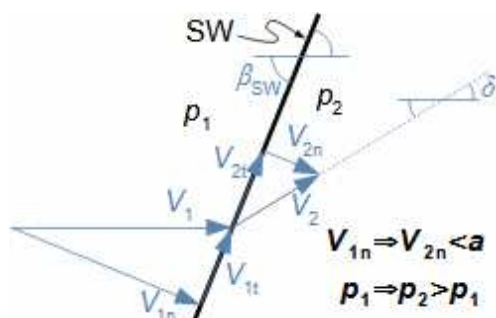


p [MPa]; t [°C].

Šikmá rázová vlna

Šikmá rázová vlna je skloněna vůči směru proudění před ní o úhel rázové vlny β_{SW} . Při průchodu proudění šikmou rázovou vlnou se jeho rychlost sníží (může být podzvuková i nadzvuková) a navíc dojde ke změně směru proudu o úhel δ , viz **Obrázek 107**. Přičemž pro normálové složky rychlosti šikmé rázové vlny V_{1n} , V_{2n} platí stejné vlastnosti jako pro proudění procházející kolmou rázovou vlnou, viz **Úloha 1007**. Lze také dokázat rovnost tečných složek rychlosti $V_{1t}=V_{2t}$ [Kadrnožka, 2004, s. 126-127]. Šikmé rázové vlny vznikají při obtékání těles nadzvukovou rychlostí.

- **107:** –
Průchod plynu
šikmou rázovou
vlnou



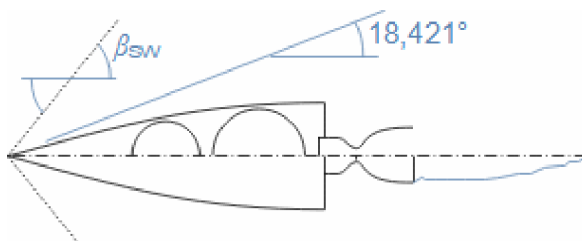
δ [°] Odklon proudu za rázovou vlnou od původního směru. Index $_n$ označuje normálové složky rychlosti, Index $_t$ označuje tečné složky rychlosti.

Úhel rázové vlny

Jestliže je úhel β_{SW} stejný jako Machův úhel μ , pak musí platit $V_{1n}=a_1$ a jedná se pouze o zvukovou vlnu, což plyne z definice Machova úhlu. Dále lze dokázat, že k největší energetické ztrátě (nárůstu entropie) dochází při $\beta_{SW}=90^\circ$ – to znamená, že ztráty v šikmé rázové vlně jsou menší než v kolmé pro stejný tlakový poměr tlaků před a za vlnou.

- **Úloha 1007:** – Jaký úhel rázové vlny vytvoří raketová střela při rychlosti $M=2,5$ Mach? Jaká bude rychlost, teplota a tlak v proudu za vlnou? Geometrie střely je na obrázku. Ostatní parametry jsou: $\kappa=1,4$, $t_1=20^\circ\text{C}$, $p_1=101\,325,25\text{ Pa}$, $r=287\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Řešení úlohy je uvedeno v **Příloze 1007**.

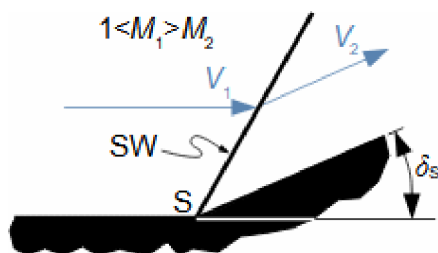


Vznik šikmé rázové vlny

Šikmé rázové vlny vznikají v nadzvukovém proudění v místech zdrojů tlakových poruch, například hrany profilů, nerovnosti na obtékaných plochách (výrobní nerovnost, kapička nestlačitelné tekutiny), rozhraní mezi nadzvukovým proudem a okolní tekutinou (typickým příkladem je nadzvukový výtok plynu z Lavalovy trysky). Šikmá rázová vlna vzniká také tam, kde se náhle zmenší průtočný průřez nadzvukovému proudění, jak je znázorněno na **Obrázku 808**. Podobným způsobem může vzniknout šikmá rázová vlna i při šikmém střetu dvou nadzvukových proudů, jak naznačuje **Obrázek 522, s. 3.14**. Jestliže je úhel plochy δ_s větší než odpovídá úhlu rázové vlny δ podle **Obrázku 107, s. 3.9**, potom se rázová vlna posune ještě před začátek klínu [Dejč, 1967, s. 150]. Zajímavá situace nastane v případě, jestliže náhle zvedající se plocha je nahrazena obloukem, viz následující kapitola.

808:

Vznik šikmé rázové vlny u paty náhle se zvedající obtékané plochy



δ_s [°] úhel obtékané plochy.

Vznik šikmých rázových vln na hranicích kapek

Odklonu proudu při průchodu šikmou rázovou vlnou se využívá k záměrné změně směru nadzvukového proudění k řízení vektoru tahu raketových motorů na tuhé pohonné látky. V takovém případě je rázová vlna vytvořena pomocí kapičky nestlačitelné kapaliny (například N_2O_4) vstříknuté na vnitřní stranu trysky.

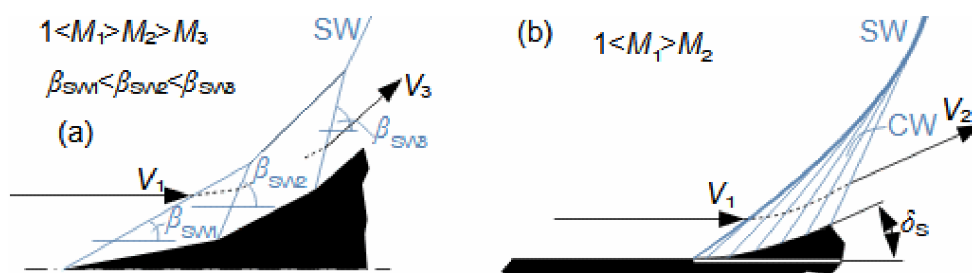
Nedosažitelné kompresní vlny

Kompresní vlna je útvar ekvivalentní rázové vlně. Jedná se o plynulou izoentropickou kompresi nadzvukového proudění ve zužujícím se prostoru tak, jak popisuje Hugoniotova věta. V praxi ale tento děj není uskutečnitelný, protože snižování průtočného průřezu by muselo být nekonečně malé [Dejč, 1967, s. 405]. Při reálném nadzvukovém proudění lze pouze využít jevu zvanému kumulace rázových vln pro zředění rázové vlny.

Kumulace rázových vln

Jestliže za šikmou rázovou vlnou jsou vytvořeny podmínky, pro vznik dalších šikmých rázových vln, pak tyto další šikmé rázové vlny budou mít postupně vzrůstající úhel rázové vlny úhel β_{SW} . To znamená, že se tyto šikmé rázové vlny v určité vzdálenosti od obtékané plochy sloučí do jedné, viz **Obrázek 481**. Výsledná šikmá rázová vlna odpovídá součtu hybností sloučených rázových vln a má i menší úhel β_{SW} než první vlna.

481:



(a) kumulace šikmých rázových vln na stupňující se ploše; (b) kumulace šikmých rázových vln na pozvolna se zvedající ploše (zde je již kumulace podobná kompresní vlně). CW-soustava kompresních vln.

Zředění rázové vlny

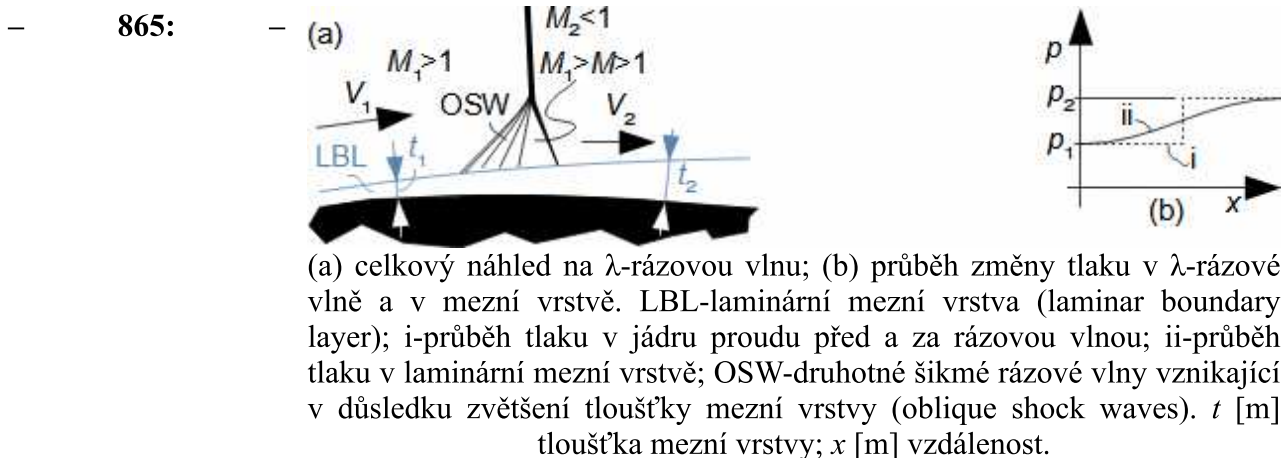
V letectví se provádí experimenty se snižování zvukových jevů způsobené rázovými vlnami při nadzvukových letech založené na rozdělení rázové vlny na několik dílčích vln (zředění rázové vlny, viz **Obrázek 905**). Tímto způsobem se zvýší úhel výsledné rázové vlny (poté co se setkají všechny rázové vlny od trupu letounu). Čím je totiž úhel rázové vlny větší (nejlépe 90°), tím je zvukový efekt od vlny menší [Hošek, 1962, s. 60] – což by umožňovalo dopravním letounům alespoň omezeně let vysokou rychlostí i nad obydlenými oblastmi.

905:
Projekt Quiet Spike

Projekt se úspěšně zabýval možností snížit intenzitu zvukových jevů pomocí odstupňovaně prodloužené přídě letounu. Zde testování teleskopické přídě letounu F-15B. NASA Photo by:Carla Thomas

λ -rázová vlna

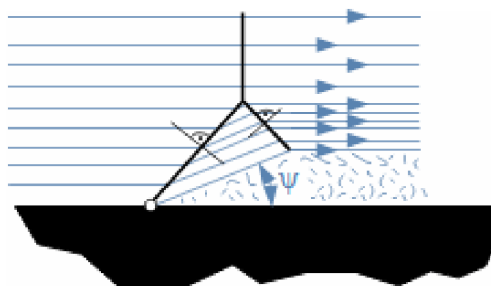
λ -rázová vlna (**Obrázek 865**) vzniká při obtékání těles transsonickou rychlostí (přibližně mezi kritickým Machovým číslem a $M=1..1,3$) s laminární mezní vrstvou. V mezní vrstvě se tlak zvyšuje postupně na úkor rychlosti, protože v mezní vrstvě je podzvukové proudění. Tím se zvětšuje její tloušťka a vzniká klín od kterého dochází ke kumulaci šikmých rázových vln, což je dobře patrné na zjednodušeném schématu λ -rázové vlny na **Obrázku 867**. Výsledná rázová vlna je často mírně skloněna dopředu [Hošek, 1949]. V případě turbulentního proudění je klín velmi malý (turbulentní proudění není tak citlivé na změnu tlaku) a na hranici mezní vrstvy vzniká přímo kolmá rázová vlna.



Ztráty v λ -rázové vlně

Obecně je ztráta v λ -rázové vlně menší než u přímé rázové vlny a větší než u šikmé [Hošek, 1949, s. 201], proto rychlost na proudnicích procházejících šikmými rázovými vlnami (ta část λ -vlny blíže k profilu), budou mít jinou rychlost, než na proudnicích procházejících přes přímou rázovou vlnu. Navíc ke ztrátě v rázové vlně je nutné přičíst ztráty spojené s odtržením proudění od profilu, která vzniká za λ -rázovou vlnou [Hošek, 1949, s. 198], [Kadrnožka, 2004, s. 132], viz **Obrázek 120**.

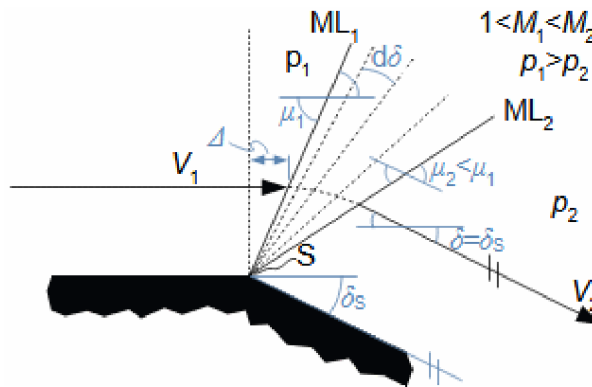
867: Princip odtržení proudu od profilu za λ -rázovou vlnou



Expanzní vlny

Zvyšující se průtočný průřez vytvářejí i tupé úhly na tělesech, například odtoková hrana projektilů, místa počátku zužování trupu letounů, v tryskách apod., viz **Obrázek 340**, na kterém je typická charakteristika obtékání tupého úhlu nadzvukovou rychlostí. Při obtékání tupých úhlů nadzvukovou rychlostí musí docházet k expanzi plynu z tlaku p_1 na tlak p_2 a ke zvýšení rychlosti proudu z V_1 na V_2 , zároveň dojde i k odklonu směru proudícího plynu o úhel δ od původního směru. V expanzní vlně probíhá pozvolná změna stavových veličin s malými ztrátami.

– **340:** –
Obtékání tupého úhlu nadzvukovou rychlostí



ML-Machova čára (Mach line); Δ [m] dráha, kterou urazí částice tekutiny rychlostí V než k ní dorazí tlaková porucha ze zdroje S.

Odklon proudu

Vznik expanzní vlny na **Obrázku 340** iniciuje tlaková porucha na hraně S. Tato porucha se šíří rychlostí zvuku (takže se nemůže šířit proti proudu), která se šíří se pod Machovým úhlem μ_1 . Hranice ML_1 , na které se začne měnit směr proudění a plyn expandovat je tzv. Machova čára jejíž sklon je roven Machovu úhlu μ_1 . Na první Machově čáře započne tedy expanze plynu. Při expanzi dochází ke změně Machova čísla a tedy i Machova úhlu. Expanze se ukončí na Machově čáře ML_2 , na které proudící plyn dosáhne tlaku p_2 . První a poslední Machova čára vytváří Machův klín, ve kterém expanze plynu probíhá. Přičemž hodnotu úhlu δ lze stanovit z Prandtl-Meyerovy funkce v [Anon., 2010], viz **Rovnice 521**.

– **521:** –

$$\delta = v_2 - v_1; \quad v_x = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \arctan \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1} (M_x^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M_x^2 - 1}$$

Prandtl-Meyerovy funkce pro odklon proudu: $v(M)$ [°] Prandtl-Meyerova funkce

Maximální odklon proudu

Maximálního úhlu odklonu proudu při průchodu v expanzní vlnou δ_{\max} a maximální rychlosti $V_{2\max}$ dosáhne proudění při expanzi do vakua $p_2=0$. Při expanzi do vakua bude $M_2=\infty$. Jestliže úhel sklonu hrany bude větší než δ_{\max} vznikne za hranou S mezi proudem a obtékanou plochou vakuum.

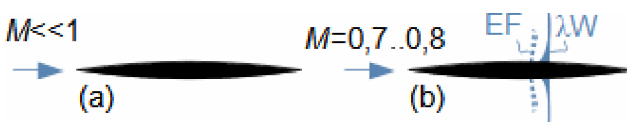
Vliv vysokých rychlostí na aerodynamiku profilu

Rozdíl mezi podzvukovým a nadzvukovým prouděním kolem profilů je nejen v rozložení rychlostí ale především v změnách hodnot aerodynamických veličin popisujících silové účinky proudění na profil křídla.

Podzvukové a transsonické proudění kolem profilů

Rychlost v okolí profilu se nejprve zvyšuje až po nejširší část profilu, pak se se začne naopak snižovat a při podzvukovém proudění žádné efekty nesledujeme, viz **Obrázek 800a**. Při kritickém Machovu čísle, respektive při transsonické rychlosti, může rychlost v nějakém místě v okolí profilu dosáhnout i rychlosti zvuku, což způsobí, že za nejširší částí profilu se vytvoří expanzní vlny za nimiž je rychlost vyšší než před nimi. Za odtokovou hranou profilu musí být rychlost podzvuková, to znamená, že před odtokovou hranou profilu vznikne rázová vlna (spojitý přechod mezi rychlostmi není možný). Zároveň se bude jednat o λ -rázovou vlnu, protože profil je krátký s laminární mezní vrstvou, viz **Obrázek 800b**.

– 800: –

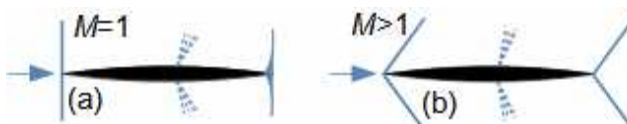


(a) podzvukové obtékání profilu; (b) transsonické obtékání profilu, [Kneubuehl, 2004, s. 78]. EF-expanzní vlna (expansion fan); λW - λ -rázová vlna.

Zvukové a nadzvukové proudění kolem profilů

λ -rázová vlna se posouvá s rostoucí rychlostí směrem k odtokové hraně profilu, takže při dosažení rychlosti zvuku se dostane až k odtokové hraně a na nátokové hraně se začne formovat kolmá rázová vlna (**Obrázek 522(a)**). Při nadzvukové rychlosti se přetvoří čelní kolmá rázová vlna na šikmou a to samé se stane na odtokové hraně, kde se vytvoří dvě šikmé rázové vlny srážkou dvou nadzvukových proudů od sací a přetlakové strany profilu, viz **Obrázek 522(b)**.

– 522: –

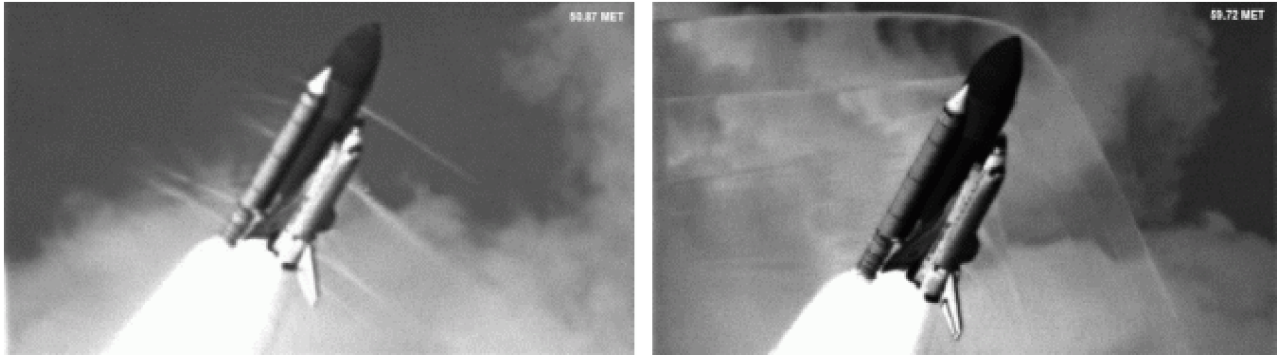


(a) obtékání čokovitého profilu při zvukové rychlosti; (b) nadzvuková rychlost před profilem [Kneubuehl, 2004, s. 78].

Nadzvukové proudění kolem raketoplánů

Příkladem přechodu z transsonické do nadzvukové rychlosti je start raketoplánu Discovery (STS-114, 2005) na **Obrázku 897**. Vlevo je snímek v čase 50,87 s po startu (1,2 Mach, aerodynamický odpor dosahuje maxima), vpravo je snímek v čase 59,72 s (1,5 Mach aerodynamický odpor klesá).

897:



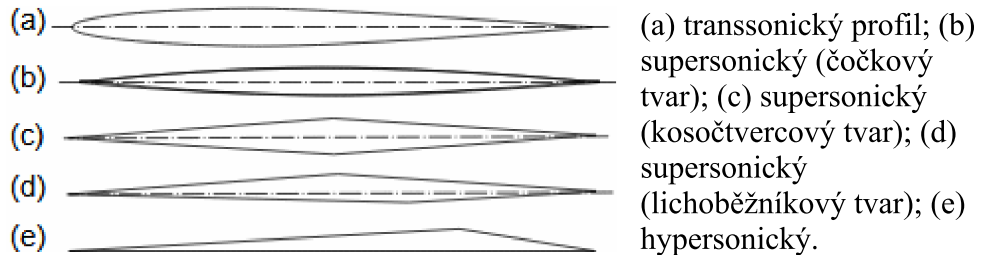
Zdroj fotografií [O'Farrell and Rieckhoff, 2011].

Profily pro vysoké rychlosti

U dobře navrženého profilu by měl být předvídatelný vznik jevů spojených s vysokou rychlostí a jejich vliv na aerodynamiku letu. Dobře předvídatelný je v tomto směru kosočtvercový profil. Expanzní vlny vznikají pouze na vrcholcích sací a přetlakové strany a λ -rázové vlny vznikají až u odtokové hrany profilu. Samozřejmě tento profil není vhodný pro nízké podzvukové rychlosti, takže se hledají různé kompromisy tvarů profilů podle toho, pro jaké rychlosti jsou primárně určeny, viz **Obrázek 894**.

894:

Typy profilů vhodné pro vysoké rychlosti ve stlačitelném proudu



Změny hodnot aerodynamických veličin profilů při vysokých rychlostech proudění

Pro přepočítání aerodynamických veličin získaných z měření při nestlačitelném proudění na situaci stlačitelného proudění lze použít Glauert-Prandtlovo pravidlo, viz **Rovnice 906**. Tyto rovnice lze použít pouze pro rychlosti proudění nepřekračující kritické Machovo číslo ani kritické Reynoldsovo číslo – profily, u kterých proudění nepřekračuje kritické Reynoldsovo číslo se nazývají laminárními profily [Abbott and Doenhoff, 1959, s. 256 a s. 283-287], [Hošek, 1949, s. 52].

906:

Glauert-Prandtlovo pravidlo

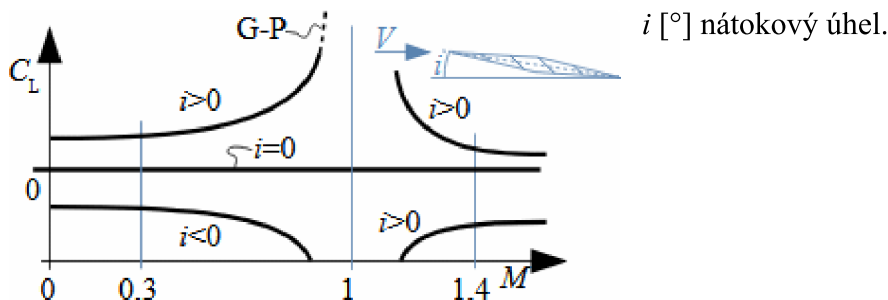
$$(a) \frac{C_{P,c}}{C_{P,i}} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \quad (b) \frac{C_{L,c}}{C_{L,i}} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \quad (c) C_{D,c} \approx C_{D,i}$$

(a) Glauert-Prandtlovo pravidlo pro tlakový součinitel profilu; (b) Glauert-Prandtlovo pravidlo pro součinitel vztlaku; (c) vliv zvyšování rychlosti na součinitel odporu. C_D [1] součinitel odporu profilu; C_L [1] součinitel vztlaku profilu; M [Mach] Machovo číslo (před profilem); C_p [1] tlakový součinitel profilu. Index $_i$ označuje nestlačitelné proudění (incompressible), index $_c$ stlačitelné proudění (compressible). Odvození je uvedeno v [Hošek, 1949, s. 49].

Změna hodnot
součinitele vztlaku

Glauert-Prandtlovo pravidlo se používá přibližně od 0,3 Mach, přičemž v blízkosti rychlosti zvuku už jeho přesnost klesá, protože výsledky výpočtu jdou do nekonečna, viz **Obrázek 893**, na rozdíl od naměřených hodnot (viz měření v [Hošek, 1949, s. 345]).

– **893:** –
Změny součinitele
vztlaku u
kosočtvercového
profilu



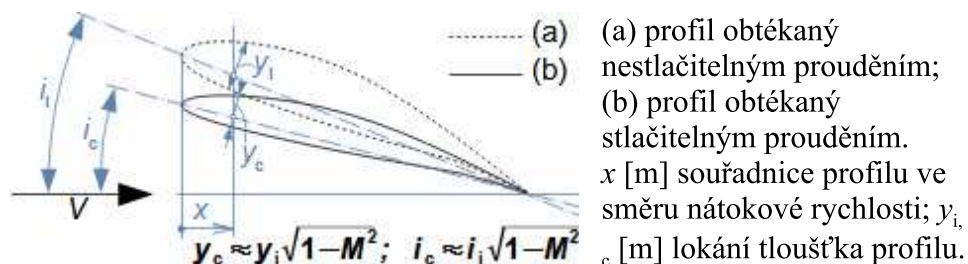
Změna hodnot
součinitele odporu

Změna součinitele odporu C_D nastává až při transsonických rychlostech, kdy vznikají λ -rázové vlny. Po opuštění transsonické oblasti při vzniku šikmých rázových vln součinitel odporu opět klesá, viz **Obrázek 897**, s. 3.15.

Změna hodnot
nátokového úhlu

Glauert-Prandtlovo pravidlo lze použít i obráceně – lze určit jak by se měly změnit rozměry profilu a jeho nátokový úhel při vysokých rychlostech, aby měl stejné aerodynamické vlastnosti jako při nízkých rychlostech, viz **Rovnice 907**. Z tedy evidentní, že pro vyšší rychlosti obtékání postačují tenké profily, čehož si každý všimne u stíhacích nadzvukových letounů, které jsou štíhlejší než podzvukové stroje.

– **907:** –
Praktická užití
Glauert-Prandtlova
pravidla



Změna hodnot
působíště vztlaku

Vysoké rychlosti způsobují také posun působíště vztlaku, které se posouvá se změnou Machova čísla [Hošek, 1949, s. 46, 240], současně se mění i velikost vztlaku, viz **Obrázek 893**. Z toho důvodu jsou moderní letouny vybaveny zařízeními pro změnu geometrie křídla či přesunu těžiště, a zejména při rychlostech kolem rychlosti zvuku mění náklon kvůli udržení takových nátokových úhlů, aby vztlak udržely v požadované velikosti – při velmi vysokých podzvukových rychlostech může být dokonce i záporný [Steuer and Haggerty, 1966, Flight, s. 69].

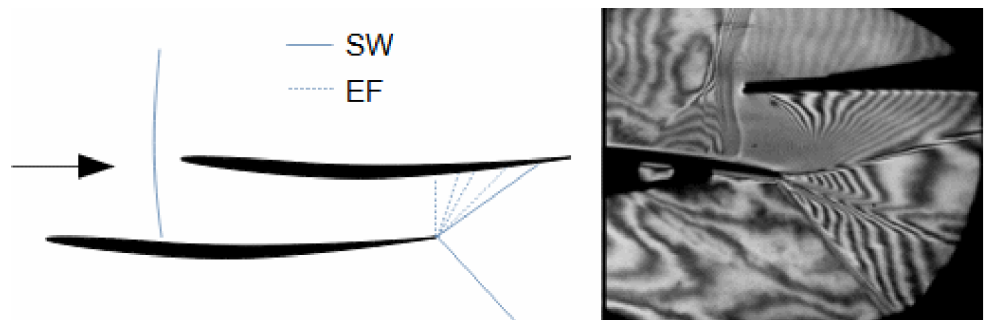
Aerodynamika profilových mříží ve stlačitelném prostředí

Jevy spojené se stlačitelným prouděním při vysoké rychlosti vznikají i v kanálech profilových mříží, což má dopady na výsledné rychlostní trojúhelníky lopatkových strojů. Vznik těchto jevů lze predikovat jak numerickými metodami, tak metodami analytickými. Nicméně existují nadzvukové aerodynamické tunely profilových mříží pro měření aerodynamických veličin a vizualizaci nadzvukového proudění.

Vizualizace nadzvukového proudění v profilové mříži

Na **Obrázku 636** je interferogram (fotografie zachycující změny hustot plynu) nadzvukového proudění turbínovou profilovou mříží, přičemž na vstupu je rychlost 1,19 Mach a na výtoku rychlost, která by při izoentropickém proudění odpovídala rychlosti 2,003 Mach. V tomto případě je již na vstupu nadzvukové proudění, takže na nátokových hranách profilů vznikají šikmé rázové vlny. V okolí výtokové části profilové mříže jsou jasně patrné expanzní vlny a vznik rázových vln na odtokové hraně při srážce dvou nadzvukových proudů.

— 636: —

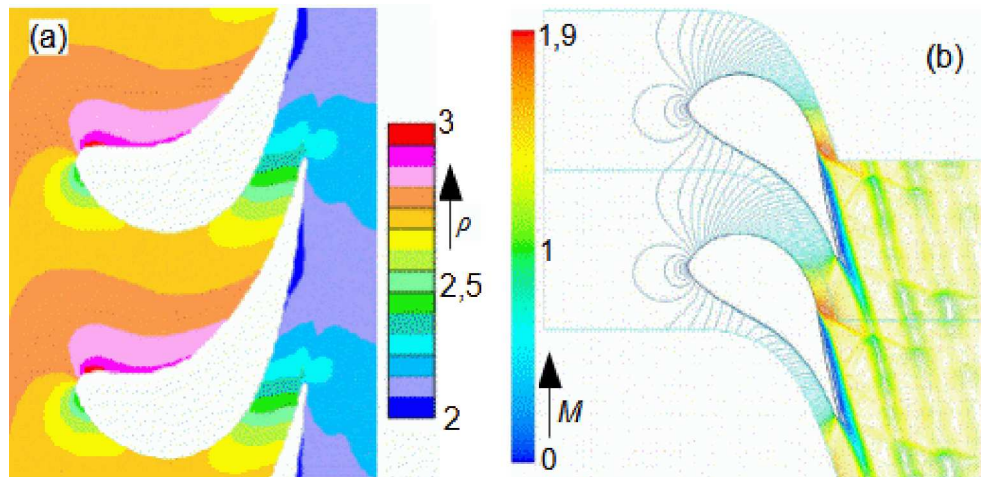


vlevo-schéma situace zaznamenané na interferogramu; vpravo-interferogram nadzvukového proudění turbínovou mříží. Pořízeno Machovým-Zehnderovým interferometrem. Snímky poskytla Aerodynamická laboratoř v Novém Kníně při Ústavu termomechaniky AVČR, v.v.i.

Výpočty nadzvukového proudění v profilových mřížích

Analytické řešení v uzavřeném tvaru lze nalézt pro stlačitelného proudění v profilové mříži pouze pro případ jednorozměrného stlačitelného proudění v kanále – to je ekvivalentní analytickému návrhu trysek nebo difuzorů. Přesnějších výsledků, které berou v úvahu prostorových charakter proudění, lze dosáhnout numerickým modelováním pomocí výkonného výpočetního hardwaru a příslušného softwaru, viz **Obrázek 635, s. 3.18**.

– **635:**
– Příklady
numerického
modelování
stlačitelného
proudění v lopatkové
mříži



(a) pracovní plyn vodní pára $M_1=0,42$ (před mříží), $M_2=0,7$ (za mříží), vytvořeno na Energetickém ústavu FSI VUT v Brně; (b) turbínová lopatková mříž, pracovní plyn vzduch [Tajč et al., 2007]. M [Mach]; ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$] hustota.

Problém zvětšení
deviačního úhlu
profilu

Při průchodu expanzními vlnami se mění směr proudění podle Prandtl-Meyerovy funkce, respektive se zvětšuje deviační úhel profilu. Navíc se tento úhel se změnami rychlosti podstatně mění.

Odkazy

- ŠKORPÍK, Jiří, 2022, Základní rovnice lopatkových strojů, *turbomachinery.education*, Brno, <https://turbomachinery.education/zakladni-rovnice-lopakovyh-stroju.html>.
- ŠKORPÍK, Jiří, 2023, Technická matematika, *engineering-sciences.education*, Brno, <https://engineering-sciences.education/technicka-matematika.html>.
- ŠKORPÍK, Jiří, 2024, Technická termomechanika, *engineering-sciences.education*, Brno, <https://engineering-sciences.education/technicka-termomechanika.html>.
- ABBOTT, Ira, DOENHOFF, Albert, 1959, *Theory of wing sections, including a summary of airfoil data*, Dover publications, inc., New York, ISBN-10:0-486-60586-8.
- ANON., 2010, *Expansion fan – Isentropic flow*, National Aeronautics and Space Administration – NASA, Washington, D.C., <http://www.grc.nasa.gov>.
- DEJČ, Michail, 1967, *Technická dynamika plynů*, SNTL, Praha.
- HLOUŠEK, Jiří, 1992, *Termomechanika*, VUT v Brně, Brno, ISBN 80-214-0387-X.
- HOŠEK, Josef, 1949, *Aerodynamika vysokých rychlostí*, Naše vojsko, Praha.
- HOŠEK, Josef, 1962, *Dnešní letectví: nové vývojové směry v letectví*, Práce, Praha
- KADRNOŽKA, Jaroslav, 2004, *Tepelné turbíny a turbokompresory*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, ISBN 80-7204-346-3.
- KNEUBUEHL, Beat, 2004, *Balistika střely, přesnost střelby, účinek*, Naše vojsko, Praha, ISBN 80-206-0749-8.
- MACUR, Milan, 2010, *Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua*, Vutium, Brno, ISBN 978-80-214-3944-3.
- O'FARRELL, J.M., RIECKHOFF, T.J., 2011, *Direct Visualization of Shock Waves in Supersonic Space Shuttle Flight*, George C. Marshall Space Flight Center, AL 35812 – Technical Memorandum.
- STEVER, Guyford, HAGGERTY James, 1966, *Flight*, Time Inc.
- TAJČ, Ladislav, BEDNÁŘ, Lukáš, POLANSKÝ, Jiří, Šťastný, Miroslav, 2007, Radial Control Stage with Partial Steam Admission, *Proceedings of the 8th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows*, Lyon.