$$\vec{a} = \mathrm{grad}\ \left(\frac{c^2}{2}\right).$$

1040

Řešení Úlohy 1040

Zrychlení tekutiny v trubce výměníku je pouze v jednom směru a podle výsledků z úlohy [42.1087] je rovno:

$$a_x = \frac{dq}{dx} - \frac{di}{dx} \qquad \text{(a).}$$

Eulerova rovnice hydrodynamiky [42.1044] zjednodušená pouze pro jeden směr a to ve směru osy *x* při zanedbání vlivu vnějšího zrychlení má tvar:

$$\frac{1}{2}\frac{dc^2}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \qquad \text{(b).}$$

Přičemž gradient tlaku je:

$$\mathrm{grad}\ \ p = \frac{dp}{dx}.$$

Podle vzorce pro zrychlení [42.961] je zrychlení rovno derivaci potenciální energie:

$$a_x = \frac{1}{2}\frac{dc^2}{dx} \qquad \text{(c).}$$

Takže kombinací *Rovnic (a), (b), (c)* lze psát:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx} - \frac{di}{dx}.$$

Gradient tlaku ve směru proudění tedy bude:

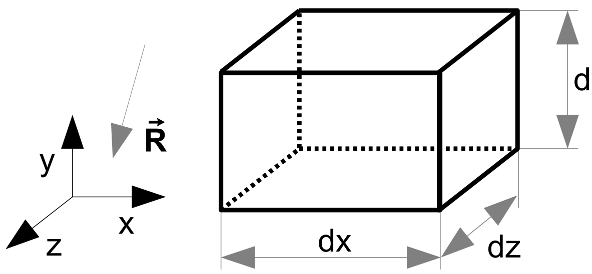
$$\frac{dp}{dx} = \rho\left(\frac{di}{dx} - \frac{dq}{dx}\right).$$

1044

Odvození Eulerovy rovnice hydrodynamiky ustáleného potenciálního proudění

Jestliže na tekutinu působí nějaké síla bude podle Newtonova pohybového zákona v daném směru zrychlovat. V tomto případě rychlost tzv. mohou měnit síly tíhové od vnějšího zrychlení a síly od rozdílu tlaku působící na elementární objem tekutiny ve vyšetřovaném bodě podle d'Alembertova principu [1, s. 45]. Směr zrychlení tekutiny pak bude totožný s výslednicí těchto sil.

Například na elementární objem tekutiny ve tvaru kvádru o stranách *dx*, *dy*, *dz* při potenciálním proudění bude působit v jednotlivých směrech síla od tlaku odpovídající přírůstku tlaku a plochy elementu a současně síla od vnějšího zrychlení vnější zrychlení odpovídající hmotnosti tekutiny v tomto elementárním objemu:



Takže pro sílu působící od rozdílu tlaku ve směru osy *x, y, z* lze psát (první index označuje směr v němž tlak působí, druhý index označuje osu kolmou na rovinu, v níž napětí působí):

$$dF_{p,x}=-dp_{xx}dy\cdot dz,$$
$$dF_{p,y}=-dp_{yy}dx\cdot dz,$$
$$dF_{p,z}=-dp_{zz}dx\cdot dy.$$

Podobně pro sílu působící na uvedený element tekutiny od vnějšího zrychlení (například gravitačního):

$$dF_{R,x}=R_x\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz,$$
$$dF_{R,y}=R_y\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz,$$
$$dF_{R,z}=R_z\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz.$$

Tyto dvě síly způsobuje zrychlování tekutiny v jednotlivých směrech:

$$dF_{p,x}+dF_{R,x}=a_x\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz,$$
$$dF_{p,y}+dF_{R,y}=a_y\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz,$$
$$dF_{p,z}+dF_{R,z}=a_z\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz.$$

Tyto rovnice silové rovnováhy v jednotlivých směrech lze upravit na tvar:

$$a_x\cdot\rho=R_x\cdot\rho-\frac{dp_{xx}}{dx},$$
$$a_y\cdot\rho=R_y\cdot\rho-\frac{dp_{yy}}{dy},$$
$$a_z\cdot\rho=R_z\cdot\rho-\frac{dp_{zz}}{dz} \qquad \text{(a).}$$

Pro derivace tlaku musí platit [42.269], [42.417]:

$$\frac{dp_{xx}}{dx}=\frac{\partial p}{\partial x};\ \frac{dp_{yy}}{dy}=\frac{\partial p}{\partial y};\ \frac{dp_{zz}}{dz}=\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Jedná se tedy o gradient tlaku. Podobně lze vyjádřit složky zrychlení potenciálního proudění podle [42.961]:

$$a_x=\frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial x};\ a_y=\frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial y};\ a_z=\frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial z}.$$

Takže *soustavu rovnic (a)* lze podle vektorové analýzy zapsat jako součet gradientů (oproti předchozímu zápisu soustavy je prostě jen kratší – aby se nemusely vypisovat všechny tři směry – , ale znamená to samé):

$$\nabla\left(\frac{c^2}{2}\right)=\vec{R}-\frac{1}{\rho}\nabla p.$$

Odkazy

1. MACUR, Milan. *Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua*, 2010. Brno: Vutium, ISBN 978-80-214-3944-3.

1079

Základní spojnicový nomogram – odvození rovnice

Jedná se nejednoduší typ spojnicového nomogramu, ve které jsou všechny tři osy úsečkami přičemž jedna úsečka je přesně uprostřed dvou.