Příloha **460** článku [35. Energetická bilance oběhu Stirlingova motoru](https://www.transformacnitechnologie.cz/seznam-clanku.html#35), https://www.transformacnitechnologie.cz/seznam-clanku.html#35.

Tepelná bilance teplé strany, studené strany a regenerátoru

Obecná rovnice energetické změny elementu objemu pracovního plynu dV^{pp} o hmotnosti dm^{pp}:

$dQ = dU^{pp} + p \cdot dV^{pp}$, [43.603] (a)

dQ [J] změna tepelného obsahu pracovního plynu,
dU^{pp} [J] změna vnitřní energie pracovního plynu,
p [Pa] tlak pracovního plynu,
dV^{pp} [m^3] změna objemu pracovního plynu vlivem změny jeho stavových veličin.

Změna objemu pracovního plynu V^{pp} se obtížně obecně vyjadřuje*, proto je vhodnější druhý tvar zápisu I. zákona termodynamiky:

$dQ = dI^{pp} - V^{pp} \cdot dp$, [43.603] (b)

dQ [J] změna tepelného obsahu pracovního plynu,
dI^{pp} [J] změna entalpie pracovního plynu (součet vnitřní energie a mechanické energie plynu),
$V^{pp} = V_i$ objem pracovního plynu ve vyšetřovaném objemu je stejný jako vyšetřovaný objem, který úplně vyplňuje.

**poznámka*
Použitím rovnice *(a)* povede po úpravách (derivaci stavové rovnice pro získání diferenciálu dV^{pp} [1, s. 76]) tak či tak na tvar rovnice *(b)*. Tvar rovnice *(b)* je vhodný pro aplikaci na otevřené soustavy-teplá strana motoru i studená stran motoru jsou otevřeny do regenerátoru.

Odtud tepelné bilance vyšetřovaných objemů. Teplo se transformuje na vnitřní tepelnou energii plynu nebo práci a naopak.

Tepelná bilance teplé strany motoru za oběh:

$Q_T = \oint dQ_T = \oint dI_T - \oint V_T \cdot dp$,

Q_T [J] tepelná bilance teplé strany motoru za oběh,
dI_T [J] změna entalpie pracovního plynu na teplé straně motoru,
V_T [m^3] objemu pracovního plynu na teplé straně motoru (protože pracovní plyn zaplňuje celý objem teplé strany motoru je stejný jako objem teplé strany motoru).

$-\oint V_T \cdot dp = \oint p \cdot dV_T = A_T$, [35.463]

Tepelná bilance studené strany motoru za oběh:

$Q_S = \oint dQ_S = \oint dI_S^{pp} - \oint V_S \cdot dp$,

Q_S [J] tepelná bilance studené strany motoru za oběh,
dI_S [J] změna entalpie pracovního plynu na studené straně motoru,
V_S [m^3] objemu pracovního plynu na studené straně motoru (protože pracovní plyn zaplňuje celý objem studené strany motoru je stejný jako objem studené strany motoru).

$-\oint V_S \cdot dp = \oint p \cdot dV_S = A_S$, [35.463]

Tepelná bilance regenerátoru za oběh:

$Q_R = \oint dQ_R = \oint dI_R - \oint V_R \cdot dp = 0$,

Q_R [J] tepelná bilance studené strany motoru za oběh,
dI_R [J] změna entalpie pracovního plynu v regenerátoru,
V_R [m^3] objemu pracovního plynu v regenerátoru (protože pracovní plyn

zaplňuje celý mrtvý objem regenerátoru je stejný jako mrtvý objem regenerátoru).

$-\oint V_R \cdot dp = -\oint p \cdot dV_R = 0$,[35.463]

odtud

$\oint dI_R = 0$.

Teplo transformované na práci v regenerátoru se ve stejném množství transformuje zpět na teplo a to samé platí i pro vnitřní tepelnou energii plynu.

Vztah mezi tepelnou bilanci studené a teplé strany motoru vyplyne z celkové bilance pracovního plynu uzavřeného v motoru:

$\oint dQ = \oint dI - \oint V \cdot dp = Q_T + Q_S + Q_R$,

dI [J] změna entalpie pracovního plynu v motoru,

V [m^3] objemu motoru.

$\oint dI = \oint c_p \cdot m \cdot dT = 0$,

c_p [$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$] měrná tepelná kapacita pracovního plynu při stálém tlaku (pro ideální plyn c_p=konst.),

T [K] absolutní teplota pracovního plynu v motoru (střední hodnota),

m [kg] hmotnost pracovního plynu v motoru.

$-\oint V \cdot dp = \oint p \cdot dV = A$, [35.463]

A [J] vykonaná mechanická práce pracovního plynu v motoru.

$A = Q_T + Q_S$.

Vztah mezi teplem transformované na entalpii a naopak na teplé a studené straně motoru lze odvodit následovně z předchozích rovnic:

$A = Q_T + Q_S = \oint dI_T + A_T + \oint dI_S + A_S =$,

$= \oint dI_T + \oint dI_S + A$

odtud rovnost:

$\oint dI_T = -\oint dI_S = \Delta I$,

ΔI [J] teplo spotřebované na změnu entalpie pracovního plynu v motoru za jeden oběh.

Závěrečná úprava jednotlivých vztahů:

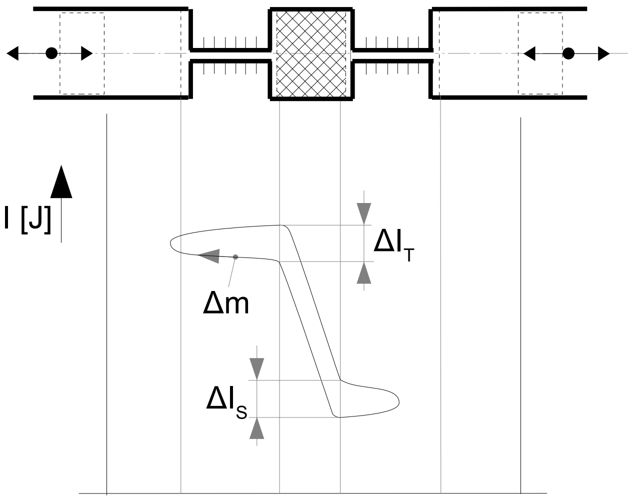
$Q_T = \Delta I + A_T$,

$Q_S = -\Delta I + A_S$,

$Q_R = 0$.

Rovnost změny entalpie na teplé a studené straně motoru

Zároveň lze rovnost přímo odvodit ze skutečnosti, že pracovní objem motoru je uzavřený a tedy i změna entalpie pracovního plynu v motoru za oběh musí být nulová (entalpie je v tomto případě stavová veličina). Jestliže se na teplé straně entalpie pracovního plynu za oběh zvýší musí se na straně studené o stejnou hodnotu snížit:



Idealizovaná představa změn entalpie elementárního množství pracovního plynu Δm při „putování pracovním objemem“.

Na konci oběhu má element *Δm* stejnou entalpii jako na jeho začátku. Během „putování“ pracovním objemem se jeho entalpie měnila. Na teplé straně došlo ke zvýšení entalpie na studené ke snížení, proto celková změna entalpie za oběh na teplé straně motoru nemusí být nulová a to samé platí i pro stranu studenou.

Elementární objem plynu vystupující z regenerátoru na studenou stranu snižuje dále svou vnitřní tepelnou i tlakovou energii (součet těchto energií dá změnu entalpie). Změna tlakové energie představuje v tomto případě nějakou vykonanou práci (plyn expanduje), takže zdánlivě by veličina *ΔI* nebyla je teplem zmařeným teplem. Ovšem na druhé straně regenerátoru probíhá opačný proces a tlaková energie elementárních objemů plynu vstupující na teplou stranu motoru se mění s opačným znaménkem a ve svém důsledku je veškerá bilance takových transformací hrazená teplem přivedeným z venku motoru.

Odkazy

1. KALČÍK, Josef, SÝKORA, Karel. *Technická termomechanika*, 1973. 1. vydání, Praha: Academia.

Příloha **463** článku 35. Energetická bilance oběhu Stirlingova motoru, https://www.transformacnitechnologie.cz/seznam-clanku.html#35.

Vnitřní práce Stirlingova motoru

$A=\oint p\cdot dV$, [43.603]

A [J] práce pracovního plynu vykonaná v motoru,
p [Pa] tlak pracovního plynu v motoru,
V [m^3] objem motoru.

Změna objemu motoru je dána posunem pístu na teplé respektive studené straně motoru:

$dV=dV_{TV}+dV_{SV}$,
V_{TV} [m^3] objem válce na teplé straně motoru,
V_{TS} [m^3] objem válce na studené straně motoru.

$A_i=\oint p\cdot dV_{TV}+\oint p\cdot dV_{SV}$,
$\oint p\cdot dV_{TV}=A_T$,
$\oint p\cdot dV_{SV}=A_S$,
A_T [J] práce pístu na teplé straně motoru,
A_S [J] práce pístu na studené straně motoru.

Příloha **464** článku 35. Energetická bilance oběhu Stirlingova motoru, https://www.transformacnitechnologie.cz/seznam-clanku.html#35.

Přibližná vnitřní tepelná účinnost Stirlingova motoru

Vnitřní tepelnou účinnost Stirlingova motoru lze přibližně vypočítat i porovnáním s účinností Carnotova oběhu pro teplotní rozdíl odpovídající teplotnímu rozdílu mezi teplou a studenou stranu regenerátoru:

$$\eta_t=\frac{A}{Q_D}=C\underbrace{\left(1-\frac{1}{\tau}\right)}_{\eta\,car} \qquad \text{(a)},$$

η_t [-] vnitřní tepelná účinnost motoru, [43.616]
A [J] práce pracovního plynu vykonaná v motoru,
Q_D [J]teplo dodané pracovnímu plynu za jeden oběh z vnějšku motoru,
C [-] Carnotův součinitel pro Stirlingův motor (*C<1*),
τ [-] teplotní poměr na hranici regenerátoru,
η_{car} [-]účinnost Carnotova oběhu pro daný teplotní poměr [43.54].

Přibližný výpočet tepla spotřebovaného na změnu entalpie pracovního plynu v motoru

$$Q_T=\Delta I+A_T\Rightarrow\Delta I=Q_T-A_T \text{ , [35.460]} \qquad \text{(b)}$$

Q_T [J] tepelná bilance teplé strany motoru za oběh,
ΔI [J] teplo spotřebované na změnu entalpie pracovního plynu v motoru za jeden oběh,
A_T [J] práce pístu na teplé straně motoru.

Tepelná bilance teplé strany motoru je zároveň rovno teplu dodanému do motoru z vnějšku:

$Q_D=Q_T$, [35.465] (c)

Kombinací rovnic *(a)*, *(b)* a *(c)* lze sestrojit rovnici pro výpočet tepla *ΔI*:

$$\Delta I=\frac{A}{\eta_t}-A_T \, .$$

Příloha **469** článku [35. Energetická bilance oběhu Stirlingova motoru](https://www.transformacnitechnologie.cz/seznam-clanku.html#35), https://www.transformacnitechnologie.cz/seznam-clanku.html#35.

Tepelná bilance regenerátoru

Tepelná bilance pracovního plynu v motoru mezi počátkem oběhu (stavy označeny *0*) a libovolným bodem oběhu *x* je rovna součtu tepelných bilancí pracovního plynu v jednotlivých objemech (odvozeno již při odvozování rovnice [35.460]):

$$\int_0^x dQ=\int_0^x dQ_T+\int_0^x dQ_S+\int_0^x dQ_R \, ,$$

index *T* označuje teplou stranu motoru, *S* studenou stranu motoru a *R* regenerátor.

Odtud energetická bilance pracovního plynu v regenerátoru mezi počátkem oběhu a libovolným bodem oběhu:

$$Q_{R,x}=\int_0^x dQ-\int_0^x dQ_T-\int_0^x dQ_S \, .$$

Odtud energetická bilance pracovního plynu na teplé a studené straně motoru mezi počátkem oběhu a libovolným bodem oběhu:

$$\int_0^x dQ_T=\int_0^x dI_T-\int_0^x V_T\cdot dp \, , \quad [35.460]$$

dI_T [J] teplo nutné ke změně entalpie pracovního plynu na teplé straně motoru,
V_T [m^3] objemu pracovního plynu na teplé straně motoru (protože pracovní plyn zaplňuje celý objem teplé strany motoru je stejný jako objem teplé strany motoru).

$$\int_0^x dQ_S=\int_0^x dI_S-\int_0^x V_S\cdot dp \, , \quad [35.460]$$

dI_S [J] teplo nutné ke změně entalpie pracovního plynu na studené straně motoru,
V_S [m^3] objemu pracovního plynu na studené straně motoru (protože pracovní plyn zaplňuje celý objem studené strany motoru je stejný jako objem studené strany motoru).

$$Q_{R,x}=\int_0^x dQ-\int_0^x dI_T+\int_0^x V_T\cdot dp-\int_0^x dI_S+$$
$$+\int_0^x V_S\cdot dp \; \text{(a)}.$$

Výraz pro celkovou tepelnou bilanci pracovního plynu v motoru mezi počátkem oběhu a libovolným bodem oběhu:

$$\int_0^x dQ=c_p\cdot m\int_0^x dT-\int_0^x V\cdot dp \, ,$$

c_p [J·kg^{-1}·K^{-1}] měrná tepelná kapacita pracovního plynu při stálém tlaku (pro ideální plyn c_p=*konst.*),
m [kg] hmotnost pracovního plynu v motoru.
T [K] absolutní teplota pracovního plynu v motoru (střední hodnota),
V [m^3] objemu motoru.

$T=\frac{p\cdot V}{r\cdot m}$, stavová rovnice ideálního plynu [43.955]

r [kg·J^{-1}·K^{-1}] individuální plynová konstanta pracovního plynu.

$$\int_0^x dQ=\frac{c_p}{r}(p_x\cdot V_x-p_0\cdot V_0)-\int_0^x V\cdot dp$$

$\frac{c_p}{r}=\frac{\kappa}{\kappa-1}$, [1, s. 75]

κ [-] Poissonova konstanta.

$$\int_0^x dQ=\underbrace{\frac{\kappa}{\kappa-1}(p_x\cdot V_x-p_0\cdot V_0)}_{Ix}-\int_0^x V\cdot dp \qquad \text{(b)}$$

I_x [J] změna entalpie pracovního plynu v motoru.

Po dosazení rovnice *(b)* do *(a)* a úpravách má rovnice tepelné bilance pracovního plynu v regenerátoru mezi počátkem oběhu *0* a libovolným bodem oběhu *x* tvar:

$$Q_{R,x}=\frac{\kappa}{\kappa-1}(p_x\cdot V_x-p_0\cdot V_0)-\int_0^x V\cdot dp+$$
$$+\int_0^x V_T\cdot dp+\int_0^x V_S\cdot dp-\int_0^x dI_T-\int_0^x dI_S=$$
$$=\frac{\kappa}{\kappa-1}(p_x\cdot V_x-p_0\cdot V_0)-\int_0^x (V_T+V_S+V_R)\cdot dp+$$
$$+\int_0^x V_T\cdot dp+\int_0^x V_S\cdot dp-\int_0^x dI_T-\int_0^x dI_S=$$
$$=\frac{\kappa}{\kappa-1}(p_x\cdot V_x-p_0\cdot V_0)-\int_0^x V_R\cdot dp-$$
$$-\int_0^x dI_T-\int_0^x dI_S$$
$$Q_{R,x}=\frac{\kappa}{\kappa-1}(p_x\cdot V_x-p_0\cdot V_0)-V_R(p_x-p_0)-$$
$$-\underbrace{\int_0^x dI_T}_{ITx}-\underbrace{\int_0^x dI_S}_{ISx}.$$

$I_{T,x}$ [J] změna entalpie pracovního plynu na teplé straně motoru,
$I_{S,x}$ [J] změna entalpie pracovního plynu na studené straně motoru.

Teplo sdílené mezi matricí regenerátoru a pracovním plynem se během oběhu mění a maximální teplo uložené v matrici regenerátoru během oběhu musí činit rozdíl maxima a minima funkce $Q_{R,x}$:
$Q_{Reg}=Q_{R,x,max}-Q_{R,x,min}$.

Poznámka
Pro změnu entalpie pracovního plynu v motoru mezi počátkem oběhu *0* a libovolným bodem oběhu *x* je zároveň rovna součtu změny entalpií v jednotlivých objemech motoru viz. rovnice *(b)*:

$$I_x=\frac{\kappa}{\kappa-1}(p_x\cdot V_x-p_0\cdot V_0)=\int_0^x dI_T+\int_0^x dI_S+\int_0^x dI_R$$

Odkazy

1. KALČÍK, Josef, SÝKORA, Karel. *Technická termomechanika*, 1973. 1. vydání, Praha: Academia.

Příloha **474** článku [35. Energetická bilance oběhu Stirlingova motoru](https://www.transformacnitechnologie.cz/seznam-clanku.html#35), https://www.transformacnitechnologie.cz/seznam-clanku.html#35.

Změna měrné entropie pracovního plynu

Změna měrné entropie pracovního plynu v motoru mezi počátkem (index *0*) a libovolným bodem oběhu (index *x*):

$$s_x-s_0=\int_0^x \frac{dq}{T}=c_v\int_0^x \frac{dT}{T}+\int_0^x \frac{p\cdot dv}{T}, \text{ [43.582](a)}$$

s [J·kg^{-1}·K^{-1}] měrná entropie pracovního plynu v motoru,

dq [$J \cdot kg^{-1}$] tepelná změna pracovního plynu v motoru,
T [K] absolutní teplota pracovního plynu v motoru (střední hodnota),
c_v [$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$] měrná tepelná kapacita pracovního plynu při stálém objemu,
p [Pa] tlak v motoru,
v [$m^3 \cdot kg^{-1}$] měrný objem pracovního plynu v motoru.

Ze stavové rovnice ideálního plynu [43.9 55]:

$$\frac{p}{T}=\frac{r}{v} \qquad \text{(b)}$$

r [$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$] individuální plynová konstanta pracovního plynu.

Dosazením rovnice *(b)* do *(a)*:

$$s_x - s_0 = c_v \cdot \ln\frac{T_x}{T_0} + r \cdot \ln\frac{v_x}{v_0}.$$

$$T=\frac{p \cdot V}{r \cdot m},$$

m [kg] hmotnost pracovního plynu v motoru (podle [35. id459] považována za konstantní, protože je zaveden předpoklad dokonale těsného motoru).

$$v=\frac{V}{m}.$$

$$s_x - s_0 = c_v \cdot \ln\frac{p_x \cdot V_x}{p_0 \cdot V_0} + r \cdot \ln\frac{V_x}{V_0}.$$