

---

# PROUDĚNÍ PLYNŮ A PAR TRYSKAMI

---

- strana 4.3 – **Co jsou trysky a další využití teorie trysek**
  - strana 4.3 – **Konfuzorová tryska**
    - **Úloha 102:** Výpočet hmotnostního toku tryskou
    - **Úloha 650:** Aplikace teorie trysek při výpočtu labyrintových ucpávek, viz čl. 6
  - strana 4.8 – **Lavalova tryska (konvergentně-divergentní tryska)**
    - **Úloha 104:** Výpočet rozměru kuželové Lavalovy trysky
    - **Úloha 336:** Výpočet rozměrů Lavalovy trysky pro proudění vodní páry
    - **Úloha 862:** Výpočet polohy rázové vlny v trysce
    - **Úloha 410:** Výpočet Lavalovy trysky v injektoru, viz čl. 5
  - strana 4.13 – **Proudění v šikmo seříznuté trysce**
  - strana 4.14 – **Proudění tryskou se ztrátami**
    - **Úloha 109:** Výpočet rozměrů Lavalovy trysky při prouděním se ztrátami
    - **Úloha 896:** Výpočet ztráty v kolmé rázové vlně vzniklé v Lavalově trysce, viz čl. 3
  - strana 4.16 – **Tryska jako lopatkový kanál**
    - **Úloha 923:** Aplikace teorie trysek při výpočtu expanze páry v lopatkovém kanálu, viz čl. [Škorpík, 2022]
  - strana 4.16 – **Hmotnostní tok skupinou trysek, stupňů turbín a Stodolovo pravidlo**
    - **Úloha 1000:** Výpočet změny hmotnostního toku v turbíně při změně vstupního tlaku, viz čl. [Škorpík, 2025]
  - strana 4.18 – **Tryska raketového motoru**
  - strana 4.19 – **Odkazy**
  - strana 4.21-33 – **Přílohy**
-

- **autor:** – ŠKORPÍK, Jiří ([LinkedIn.com/in/jiri-skorpik](https://www.linkedin.com/in/jiri-skorpik))
- **datum vydání:** – Únor 2006, Červen 2023 (2. vydání)
- **název:** – Proudění plynů a par tryskami
- **web:** – *fluid-dynamics.education*
- **provenience:** – Brno (Česká republika)
- **email:** – [skorpik.jiri@email.cz](mailto:skorpik.jiri@email.cz)

Copyright©Jiří Škorpík, 2006-2023  
Všechna práva vyhrazena.

---

## Co jsou trysky a další využití teorie trysek

*Tryska – jiný frekventovaný název dýza – je kanál s plynulou změnou průtočného průřezu. Proudění tekutiny v trysce je děj, při kterém dochází především k poklesu tlaku a zvýšení kinetické energie tekutiny. Teorie trysek je dobře propracovaná a má i široké uplatnění v různých typech proudových strojů.*

*Tvary trysek závisí především na požadované výtokové rychlosti*

Základními tvary trysek jsou tryska konfuzorová (konvergentní), neboli zužující se, ve které probíhá podzvuková expanze a konvergentně-divergentní neboli Lavalova tryska pro nadzvukovou expanzi a jejíž tvar vychází z Hugoniotovy větty pro kanál s nadzvukovým proudem.

*Využití teorie trysek*

Pomocí propracované teorie trysek lze popsat i některé, na první pohled, složité proudění, například v lopatkových kanálech a raketových motorech. Navíc pro trysky existuje velké množství naměřených dat.

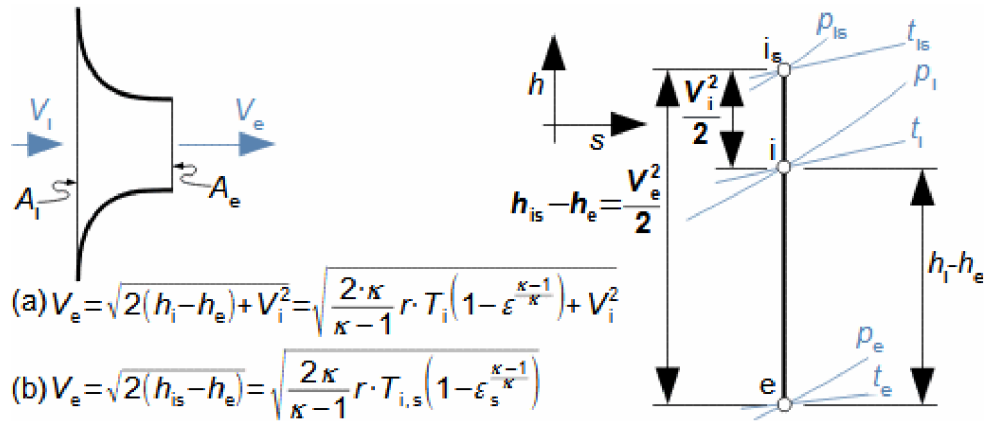
## Konfuzorová tryska

*Vzhledem k tomu, že expanze v trysce je v technice frekventovaný problém vznikla teorie ideální expanze v trysce již v 19. století [Nožička, 2000]. Tato teorie popisuje změny stavových veličin v trysce, zejména **rychlost a hmotnostní tok**. Navíc lze i teoreticky zdůvodnit vznik tzv. **kritického stavu proudění v trysce**, při kterém dosáhne tryska maximálního hmotnostního toku. K návrhu **tvary trysky** existuje více přístupů, zejména záleží na účelu trysky, technologické náročnosti její výroby a požadované maximální délce.*

~  
*Výpočet výtokové rychlosti trysky*

Ze změn stavových veličin v trysce zakreslených v  $h$ - $s$  diagramu je patrné, že rychlost plynu na výtoku z trysky závisí na vtokovém tlaku  $p_i$  a výtokovém tlaku  $p_e$  (protitlak) z trysky. **Rovnici 101, s. 4** pro výtokovou rychlost z trysky lze pak odvodit z rovnice Prvního zákona termodynamiky pro otevřený systém nebo z Bernoulliho rovnice v případě proudění kapaliny. Tato rovnice je odvozena pro dokonalou expanzi ideálního plynu bez vlivu tíhy.

101:



$$(a) V_e = \sqrt{2(h_i - h_e) + V_i^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} r \cdot T_i \left(1 - \varepsilon^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}\right) + V_i^2}$$

$$(b) V_e = \sqrt{2(h_{is} - h_e)} = \sqrt{\frac{2 \kappa}{\kappa - 1} r \cdot T_{i,s} \left(1 - \varepsilon_s^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}\right)}$$

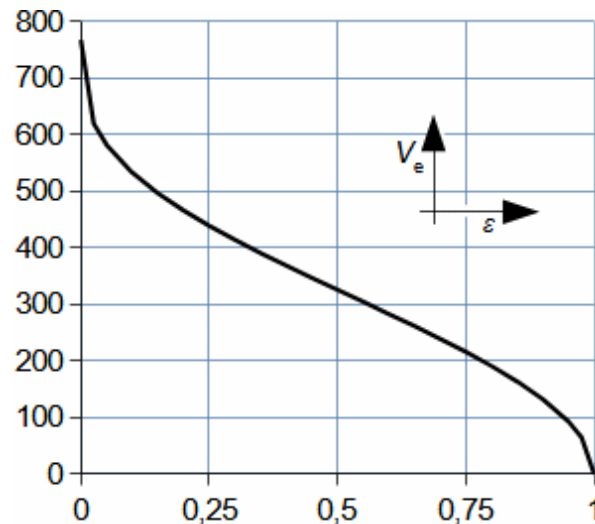
(a) výpočet ze statického stavu plynu před tryskou; (b) výpočet z celkového stavu plynu před tryskou. e-stav v ústí trysky; i-stav na vstupu do trysky.  $A$  [m<sup>2</sup>] průřezný průřez trysky;  $h$  [J·kg<sup>-1</sup>] entalpie;  $p$  [Pa] tlak;  $r$  [J·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>] individuální plynová konstanta plynu;  $s$  [J·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>] entropie;  $T$  [K] absolutní teplota plynu;  $t$  [°C] teplota;  $V$  [m·s<sup>-1</sup>] rychlost;  $\varepsilon$  [1] tlakový poměr statických tlaků ( $p_e \cdot p^{-1}_i$ );  $\varepsilon_s$  [1] tlakový poměr k celkovému vstupnímu tlaku ( $p_e \cdot p^{-1}_{is}$ );  $\kappa$  [1] konstanta adiabaty (poměr tepelných kapacit). Index  $_s$  označuje celkový stav plynu (stagnation), index  $_i$  označuje stav na vstupu do trysky, index  $_e$  označuje stav na výstupu z trysky (těsně v ústí trysky).

Odvození rovnice je v **Příloze 101**.

*Průběh výtokové rychlosti trysky*

Na **Obrázku 514** je znázorněn průběh výtokové rychlosti plynu  $V_e$  při změně protitlaku  $p_e$ , přičemž maximální rychlost plynu bude při výtoku do vakua  $p_e=0$ .

514:



$p_{at}$  [Pa] atmosférický tlak. Parametry plynu:  $\kappa=1,4$ ,  $r=287$  J·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>,  $t_i=20$  °C,  $p_i=p_{at}$ ,  $V_i=0$ . Graf pro ideální plyn.  $V$  [m·s<sup>-1</sup>];  $\varepsilon$  [1]

*Hmotnostní tok plynu tryskou*

Hmotnostní tok plynu tryskou lze vypočítat z rovnice kontinuity. V případě ideálního plynu lze použít rovnice ideálního plynu pro rychlost a získat tak rovnici pro hmotnostní tok tryskou jako funkce tlakového poměru, viz **Rovnice 334**.

334:

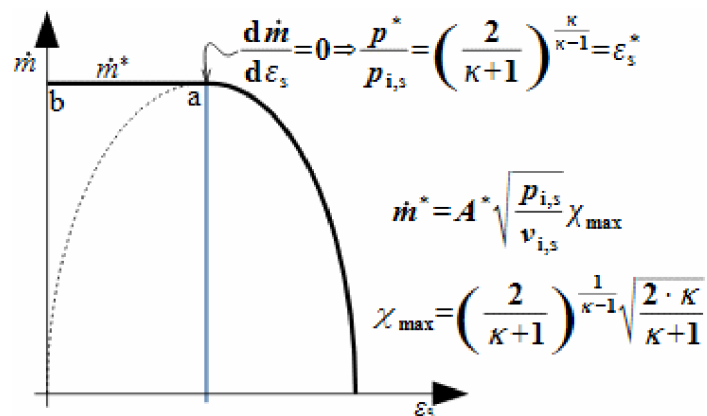
$$\dot{m} = A_e \cdot V_e \frac{1}{V_e}; \quad \dot{m} = A_e \sqrt{\frac{\rho_{is}}{V_{is}}} \chi_m; \quad \chi_m = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \sqrt{\varepsilon_s^{\frac{2}{\kappa}} - \varepsilon_s^{\frac{\kappa + 1}{\kappa}}}}$$

$\dot{m}$  [kg·s<sup>-1</sup>] hmotnostní tok plynu tryskou;  $v$  [m<sup>3</sup>·kg<sup>-1</sup>] měrný objem plynu;  $\chi_m$  [1] výtokový součinitel nebo také průtokový faktor. Odvození rovnice pro výpočet hmotnostního toku tryskou je v **Příloze 334**.

~  
Kritický stav  
proudění v trysce

Z rovnice pro hmotnostní tok, respektive průběhu výtokového součinitele, vyplývá, že by s klesajícím tlakem za tryskou  $p_e$  měl hmotnostní tok plynu  $m$  růst pouze do určitého tlakového poměru  $\varepsilon_s$ , potom by měl průtok začít klesat, viz křivka 1-a-0 na **Obrázku 515**. Ve skutečnosti od poměru  $\varepsilon_s^*$  až do expanze do vakua ( $\varepsilon_s=0$ ) je průtok konstantní a roven  $m^*$ , viz křivka a-b na **Obrázku 515**. Tlakový poměr, při kterém je dosažen maximální hmotnostní tok plynu tryskou neboli kritický stav proudění se nazývá kritický tlakový poměr (proto značka hvězdičky \*). Rovnici pro kritický tlakový poměr lze odvodit z extrému **Rovnice 334**, s. 4 pro průtok, viz **Rovnice 515**.

– **515:** –  
Průběh hmotnostního  
toku tryskou



$A^*$  [m<sup>2</sup>] nejmenší průtočný průřez trysky. Odvození rovnice pro kritický tlakový poměr  $\varepsilon_s^*$  je uvedeno v **Příloze 515**.

Výpočet  
hmotnostního toku  
tryskou pomocí  
kritického  
hmotnostního toku

Křivka 1-a-0 z **Obrázku 515** je tvarem velice blízko elipse, proto se v inženýrské praxi, pro zrychlení a zjednodušení výpočtu trysky, úsek 1-a často nahrazuje částí elipsy, která se nazývá Bendemannovou elipsou, viz **Rovnice 162**, jejíž platnost je omezena na rozsah  $p_e \geq p^*$ .

– **162:** –  
Bendemannova  
elipsa

$$\dot{m} \approx \dot{m}^* \sqrt{1 - \frac{(p_e - p^*)^2}{(p_{i,s} - p^*)^2}}$$
 Odvození rovnice pro Bendemannovu elipsu je uvedeno v **Příloze 162**.

Hodnoty kritických  
tlakových poměrů

Kritický tlakový poměr je funkcí druhu plynu, protože poměr tepelných kapacit  $\kappa$  se u jednotlivých plynů liší. Hodnoty kritických tlakových poměrů pro ideální plyn lze vypočítat pomocí **Vzorce 515**. Kritické tlakové poměry reálných plynů se mírně liší, například pro vodík je 0,527, suchý vzduch 0,528, přehřátou vodní páru 0,546, sytou vodní páru 0,577. Nicméně lze počítat s tím, že kritický tlakový poměr se pohybuje kolem hodnoty 0,5.

*Kritická rychlost*

Při kritickém nebo nižším tlakovém poměru dosahuje rychlost proudu v nejužším místě trysky rychlosti zvuku, tento stav proudění se nazývá kritickým stavem. Dosazením kritického tlakového poměru (**Rovnice 515, s. 5**) do **Rovnice 101, s. 4.4** a **Rovnice 334, s. 4** lze získat rovnice pro stanovení hodnot klíčových veličin pro nejužší místo trysky v případě dosažení nebo podkročení kritického tlakového poměru, viz **Rovnice 516**. Tyto veličiny se nazývají kritické (kritická rychlost, průtok, tlakový poměr...).

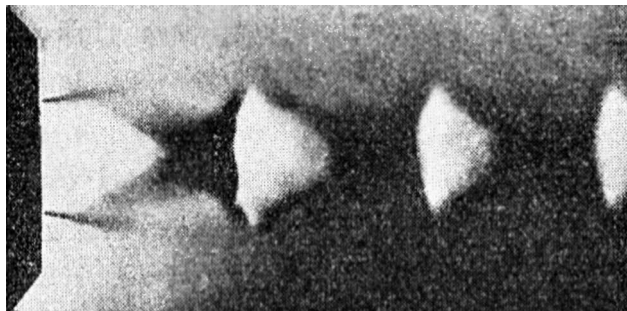
– **516:** –

$$V^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa + 1} p_{\text{k}} v_{\text{k}}}; \quad h^* = h_{\text{k}} - \frac{V^{*2}}{2}$$

$h^*$  [ $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ ] kritická entalpie (při izoentropické expanzi z celkového stavu dosahuje proudění při této entalpii kritické rychlosti, respektive rychlosti zvuku).

*Expanze za  
konfuzorovou tryskou  
při kritickém  
proudění*

Jestliže tlak v okolí ústí konfuzorové trysky je nižší než kritický tlak, pak se v ústí trysky nastaví kritická (zvuková) rychlost a kritický tlak, takže plyn za tryskou dále expanduje a jeho rychlost se zvyšuje podle **Rovnice 101, s. 4** na nadzvukovou. Podle Hugoniotovy věty současně roste průtočný průřez takto vzniklého rychlého proudu plynu. Rozšiřující se proudový kanál vytváří na okrajích s okolním plynem šikmé rázové vlny, které se odráží dovnitř proudu a snižují účinnost expanze, viz **Obrázek 984**, na kterém je výtok vzduchu z konfuzorové trysky do tlaku nižšího než kritického. Po vyrovnání tlaku s okolím expanze ustává a následuje postupná termodynamická rovnováha stavu plynu s okolním plynem.

– **984:** –

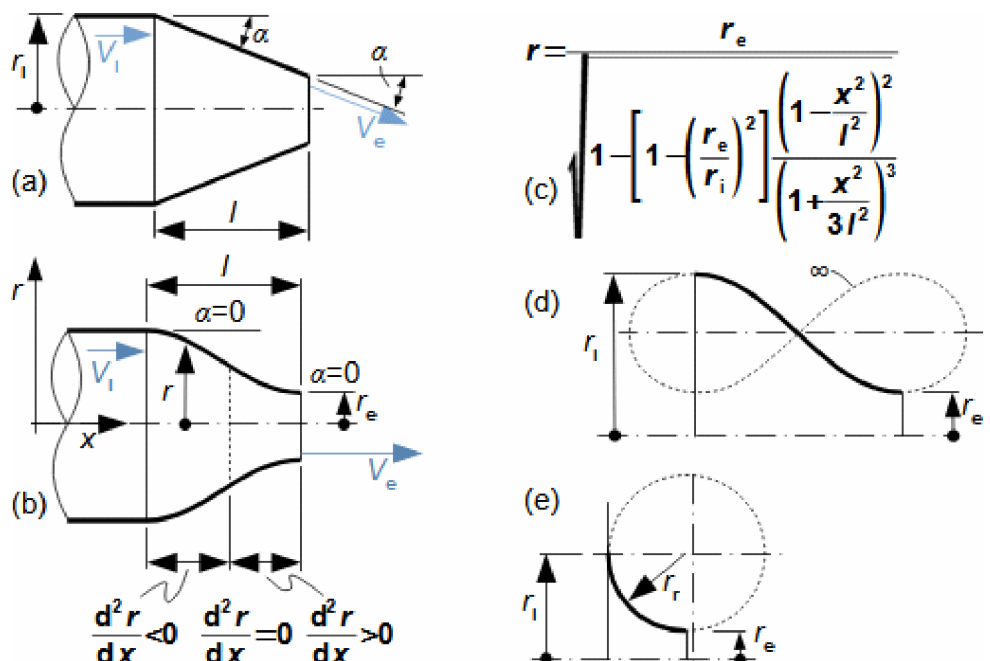
Obrázek z [Slavík, 1938, s. 5].

- **Úloha 102:** – Vzduch o počáteční rychlosti  $250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , tlaku  $1 \text{ MPa}$  a teplotě  $350 \text{ }^\circ\text{C}$  protéká konfuzorovou tryskou do prostředí o tlaku  $0,25 \text{ MPa}$ . Určete: (a) zda nastane kritické proudění, (b) rychlost na výtoku, (c) protékající množství vzduchu tryskou. Výtokový průřez trysky je  $15 \text{ cm}^2$ . Vlastnosti vzduchu:  $c_p = 1,01 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $r = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\kappa = 1,4$ . Neřešte proudění za výtokem z trysky. Řešení úlohy je uvedeno v **Příloze 102**.

~  
Tvary konfuzorových  
trysek

Obvyklé tvary zužujících se trysek jsou uvedeny na **Obrázku 475**. Tyto tvary lze aplikovat i na nekruhové kanály a lopatkové kanály. Ideální tvar trysky je plynulý, rovnoběžný s proudnicemi (na vstupu i výstupu, aby nedošlo ke vzniku turbulencí prudkou změnou směru proudění o stěnu) a takový, při kterém je dosaženo na výstupu rovnoměrného rychlostního profilu. To znamená, že výstupní rychlost by měla být ve směru osy trysky, jak vyplývá z experimentů [Dejč, 1967, s. 319]. Tuto podmínku musí splňovat i proudnice blízko okraje trysky.

475:



(a) kuželová tryska; (b) ideální tvar trysky; (c) Vitošinského tryska neboli Vitošinského konfuzor [Dejč, 1967, s. 320] (rovnice platí pro  $l \geq 2 \cdot r_e$ ); (d) tvar trysky jako lemniskáta  $\infty$ ; (e) tvar trysek pro výtok z nádob ( $r_i \approx 1,5 \cdot r_e$  [Sutton and Biblariz, 2010, s. 80]).  $l$  [m] délka trysky;  $r$  [m] poloměr;  $x$  [m] osová souřadnice.

Výhody a nevýhody  
jednotlivých tvarů  
trysek

Kuželové trysky jsou výrobně jednoduché, ale dochází u nich ke kontrakci proudu (viz kapitola **Proudění tryskou se ztrátami, s. 14**) než trysky tvaru podle **Obrázku 475b**. Nejrovnoměrnější rychlostní pole na výstupu mají trysky tvaru lemniskáty, kterou lze přibližně popsat Vitošinského vzorcem (**Obrázek 475c**) – takové tvary trysek se používají jako přestupní kanál mezi dvěma kanály a pro ofukovací trysky v aerodynamických tunelech.

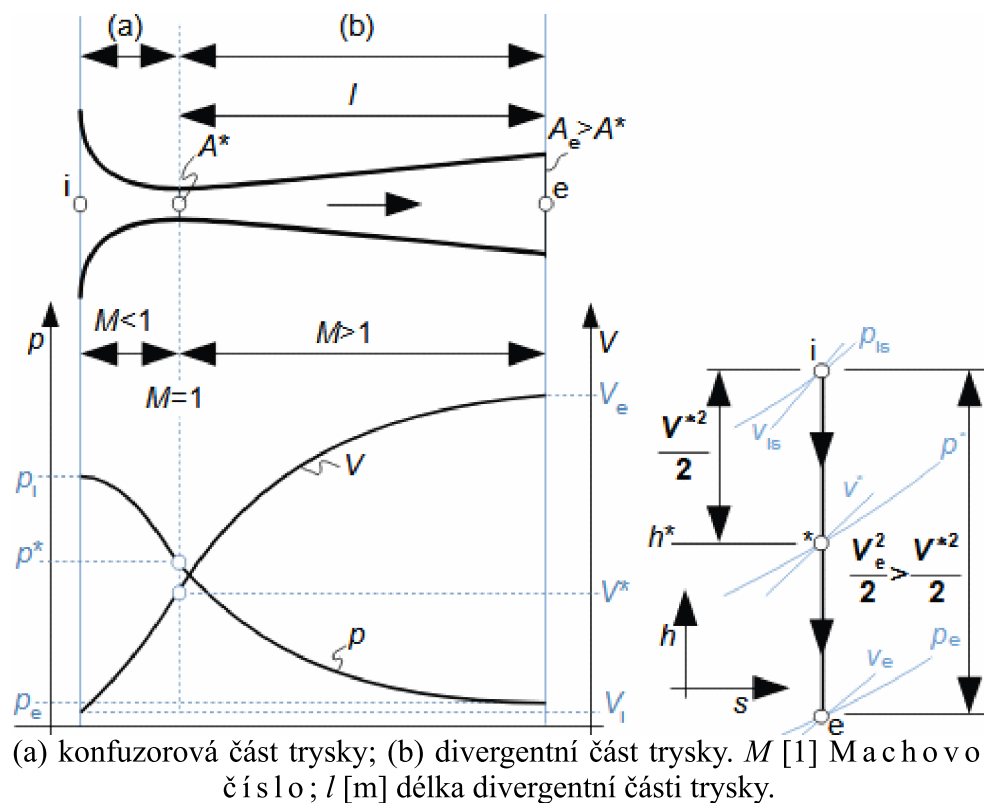
### Lavalova tryska (konvergentně-divergentní tryska)

Jestliže chceme zvýšit účinnost expanze při kritickém proudění v trysce za nejužším místem trysky (případy  $p^* > p_0$ ), pak je nutné pro expandující plyn vytvořit vhodné podmínky, tj. vytvořit za nejužším průřezem trysky rozšiřující se kanál (**divergentní kanál**) – taková konstrukce se nazývá konvergentně-divergentní tryska nebo také Lavalova tryska. Používaných tvarů Lavalových trysek je více a závisí na účelu použití, technologické náročnosti výroby a maximální požadované délce trysky. Nicméně délka trysky také ovlivňuje její provozní rozsah, protože při jiném než návrhovém stavu tj. **nenávrhovém stavu** v Lavalově trysce nebo jejím okolí vznikají efekty spojené s vysokou rychlostí.

~  
Expanze v  
divergentní části  
Lavalovy trysky

Divergentní část trysky umožňuje plynulou expanzi plynu do nadzvukových rychlostí v trysce bez větších ztrát, viz **Obrázek 103**. Přičemž v konfuzorové části trysky je rychlost proudu podzvuková  $M < 1$ , v divergentní části nadzvuková  $M > 1$  a v hrdle mezi nimi rychlost zvuku  $M = 1$ .  $h$ - $s$  diagram Lavalovy trysky trysky má stejný tvar jako  $h$ - $s$  diagram zužující se trysky na **Obrázku 101, s. 4**, stejně tak platí i rovnice pro rychlost, akorát plyn při expanzi překonává kritické parametry.

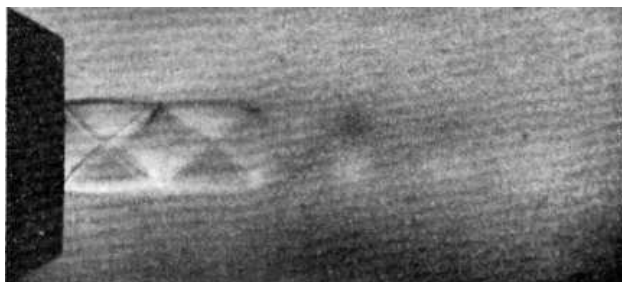
103:



Nadzvukový výtok  
plynu z divergentní  
části trysky

Výtoková rychlost Lavalovy trysky je nadzvuková a při výtoku do volného prostoru začne proudění ihned vytvářet šikmé rázové vlny – brzdění nadzvukového proudu o okolní plyn, viz **Obrázek 983, s. 4.9**.

– 983: –



Obrázek z [Slavík, 1938, s. 23].

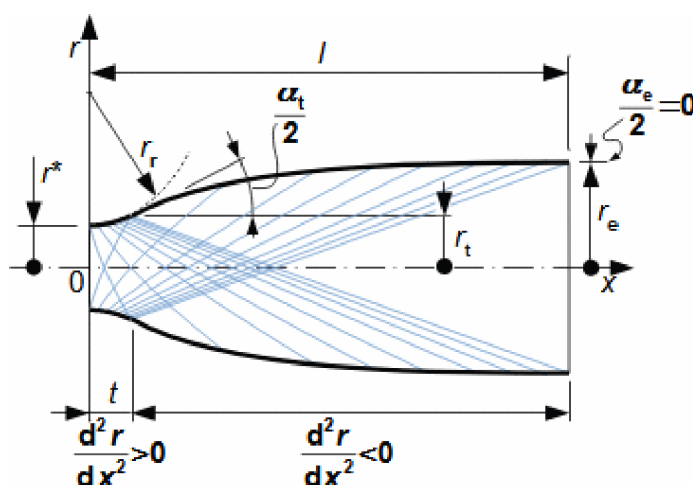
~  
Tvary Lavalových  
tryskek

Lavalovy trysky  
navržené metodou  
charakteristik

Ideálním tvarem Lavalovy trysky je tvar sestrojený tzv. metodou charakteristik, nicméně tento tvar je velmi náročný na výpočet i výrobu. Naopak nejjednodušším tvarem je kuželová tryska, zvonové trysky jsou zase obvyklé v raketové technice.

Tvar Lavalových tryskek vymodelovaný metodou charakteristik (**Obrázek 993**) je ideálním tvarem. Trysky navržené touto metodou mají totiž rovnoměrné rychlostní profil na výstupu. Metoda charakteristik je založena na postupné konstrukci expanzních vln, tyto vlny jsou na **Obrázku 993** zakresleny modře. Okrajovou podmínkou této metody je zadaný počáteční poloměr  $r_r$  při  $\alpha_e=0^\circ$  (podmínka výstupní rychlosti v osovém směru) a průtočný průřez na výstupu  $A_e$  [Dejč, 1967, s. 341], [Sutton and Biblarlz, 2010, s. 79]. Nevýhodou je, že délka takové trysky je mnohem větší než trysky kuželové, takže v důsledku vnitřního tření může být její účinnost nižší než u kuželových tryskek, proto se tento tvar tryskek používá prakticky jen v nadzvukových aerodynamických tunelech, kde je rovnoměrné rychlostní pole na výstupu velmi důležité.

– 993: –



$$r_t = r^* + r_r \left( 1 - \cos \frac{\alpha_t}{2} \right)$$

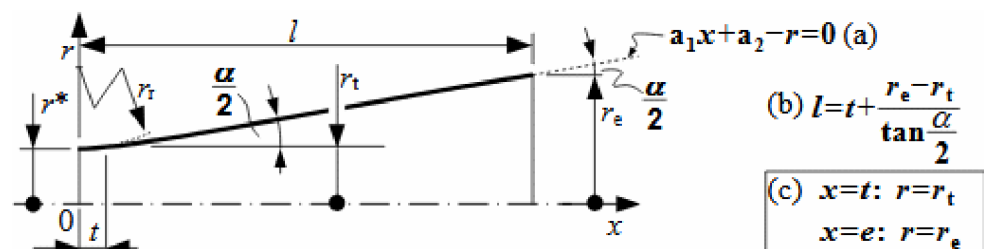
$$t = r_r \cdot \sin \frac{\alpha_t}{2}$$

$\alpha$  [°] úhel rozšíření trysky;  $t$  [m] vstupní délka rozšiřující se části trysky (obvykle kruhový obrys o poloměru  $r_r \approx 0,382 \cdot r^*$  [Sutton and Biblarlz, 2010, s. 80]). Odvození rovnic pro  $r_t$  a  $t$  jsou uvedeny v **Příloze 993**.

*Kuželové tvary  
Lavalových trysek*

Kuželový tvar Lavalovy trysky je jejím nejjednodušším tvarem, viz **Obrázek 703**. Tyto trysky jsou charakteristické snadným výpočtem i výrobou, protože mají stálý úhel rozšíření. Používají se i jako statorové kanály jednostupňových turbín, v případech kdy jsou jiné ztráty tak vysoké, že není hospodárná výroba složitějšího tvaru. Tento tvar se používá i u malých raketových motorů, malých trysek, na injektorech a ejektorech a podobně. Nevýhodou tohoto tvaru trysky je, že nelze na výstupu dosahovat rovnoměrného rychlostního pole a odklon rychlosti od osy kanálu způsobuje ztrátu na hybnosti v osovém směru (při úhlu  $\alpha=20^\circ$  asi 1 % [Sutton and Biblarz, 2010, s. 78]). Výpočet vychází ze zadaného úhlu rozšíření  $\alpha$ , který bývá 8 až  $30^\circ$  a z vypočítaného průtočného průřezu na výstupu  $A_e$ . Tyto dva parametry stačí k výpočtu délky divergentní části trysky.

703:



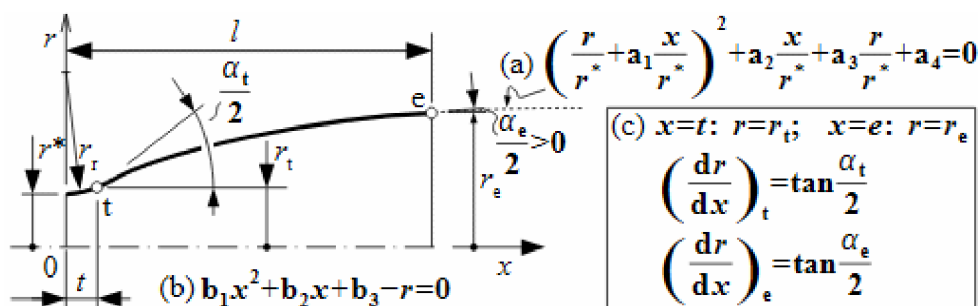
(a) rovnice obrysu trysky; (b) rovnice pro délku trysky; (c) okrajové podmínky pro výpočet konstant  $a_1, a_2$ . Odvození rovnic pro výpočet délky kuželové Lavalovy trysky jsou uvedeny v **Příloze 703**.

- **Úloha 104:** – Navrhněte divergentní část trysky (kuželový tvar) k trysce navržené v **Úloze 102, s. 4.6**. Určete Machovo číslo na výstupu z trysky. Úhel rozšíření trysky je  $10^\circ$ . Řešení úlohy je uvedeno v **Příloze 104**.
- **Úloha 336:** – Lavalovou tryskou kuželového tvaru proudí pára. Tlak a teplota páry na vstupu do trysky je 80 bar, respektive  $500^\circ\text{C}$ , tlak na výstupu z trysky je 10 bar. Tryskou má vytékat  $0,3 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$  páry. Stanovte rozměry rozšiřující se části trysky. Jaká je kvalita páry na konci expanze – přehřátá pára/sytá pára/mokrá pára? Úhel rozšíření divergentní části trysky  $\alpha=10^\circ$ . Řešení úlohy je uvedeno v **Příloze 336**.

Zvonové Lavalovy  
trysky

Zvonová tryska je především tvarem trysek raketových motorů. Tvar této trysky je navržen buď podle rovnice Rao (podle G.V.R. Rao, který tuto rovnici sestavil na základě experimentů [Rao, 1958], [Meerbeek et al., 2013]), nebo podle rovnice Allman-Hoffman (podle Allman J. G. a Hoffman J. D., kteří rovnici odvodili zjednodušením rovnice Rao [Allman and Hoffman, 1981]); obě rovnice jsou polynomy druhého stupně (paraboly), viz **Obrázek 335**. V případě okrajových podmínek pro rovnice Rao jsou výstupní a vstupní úhel na sobě závislé ( $\alpha_t = f(\alpha_e)$ ). Výběr optimální dvojice vstupního  $\alpha_t$  a výstupního úhlu  $\alpha_e$  je možný z délky ekvivalentní kuželové trysky při  $\alpha = 30^\circ$ , viz tabulky a grafy v [Sutton and Biblarz, 2010, s. 80]. V případě rovnice Allman-Hoffman stačí k řešení pouze vstupní úhel  $\alpha_t$ . Tryska navržená podle rovnice Allman-Hoffman má asi 0,2 % menší výstupní hybnost plynu v osovém směru při expanzi do vakua než tryska navržená podle rovnice Rao [Haddad, 1988], ale snadněji se s ní pracuje při hledání optimálního tvaru trysky při velkém množství kombinací vstupních parametrů pracovního plynu. Zvonová tryska je kratší než kuželová tryska, přesto má větší účinnost i hybnost v osovém směru.

– 335: –



(a) rovnice obrysu trysky podle Rao; (b) rovnice obrysu trysky podle Allman-Hoffman; (c) okrajové podmínky pro výpočet konstant  $a_1 \dots a_4$  nebo  $b_1 \dots b_3$ .

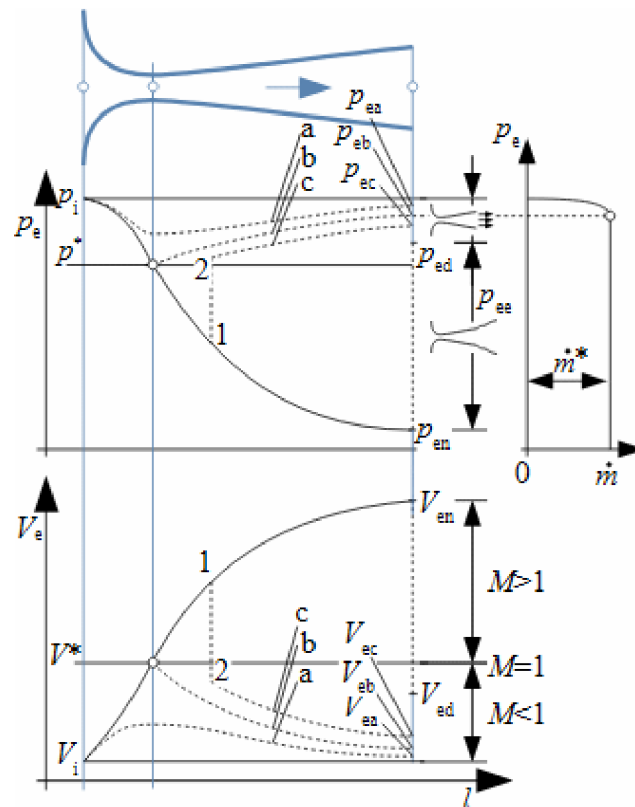
~  
Nenávrhové stavy  
Lavalových trysek

U správně navržené Lavalovy trysky dosáhne v ústí trysky tlak proudící tekutiny právě tlaku  $p_{e,n}$  (návrhový tlak). Nenávrhovým stavem trysky je tedy myšlen stav, kdy se mění vstupní parametry plynu nebo výstupní parametry plynu nebo oba parametry najednou. Tyto parametry se mohou měnit z různých příčin (regulace průtoku tryskou apod). Celkem mohou nastat dva základní případy nenávrhových stavů Lavalovy trysky a to přeexpandovaný stav a podexpandovaný stav.

Přeexpandovaný stav  
trysky

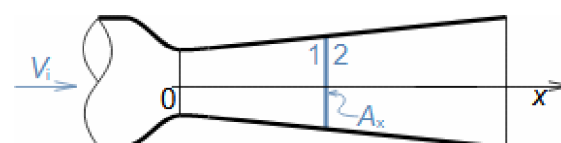
Jestliže tlak na výtoku z trysky  $p_e$  je vyšší než návrhový tlak  $p_{en}$ , pak hovoříme o tom, že tryska je přeexpandovaná (tryska byla navržena na "delší" expanzi, než je skutečnost). Přeexpandovaná tryska může mít jeden z pěti možných provozních stavů popsaných na **Obrázku 105** případy a až e, respektive protitlaky  $p_{e,a}$  až  $p_{e,e}$ . Přičemž případy c až e jsou charakteristické tím, že vznikají kolmé rázové vlny podle protitlaku, buď v trysce, na jejím okraji (případ d) a nebo až za tryskou. Vznik rázových vln při těchto nenávrhových protitlacích lze predikovat z Hugoniotovy věty. Rázová vlna v trysce nebývá stabilní a může proto vyvolávat vibrace trysky a přilehlých částí dalších strojů, navíc podstatně zvyšuje hlučnost. Při hledání polohy kolmé rázové vlny v trysce, lze vycházet z Rankine-Hugoniotových rovnic, viz **Úloha 862**.

– **105:** –  
Lavalova tryska –  
charakter proudění  
při změně protitlaku



Index  $_1$  označuje stav před rázovou vlnou;  $_2$  za rázovou vlnou.

– **Úloha 862:** – Určete přibližné místo vzniku kolmé rázové vlny v Lavalově trysce z Úlohy 104, s. 10, respektive Úlohy 102, s. 6, jestliže se tlak na výtoku z trysky zvýší o 0,55 MPa. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 862.



$x$  [m] souřadnice osy  $x$ .

*Podexpandovaný  
stav trysky*

Jestliže tlak na výstupu  $p_e$  je nižší než návrhový tlak  $p_{en}$ , pak hovoříme o tom, že tryska je podexpandovaná (tryska byla navržena na "kratší" expanzi, než je skutečnost). V případech, kdy je protitlak nižší než návrhový, bude expanze za tryskou dále pokračovat, podobně jako v případě konfuzorové trysky.

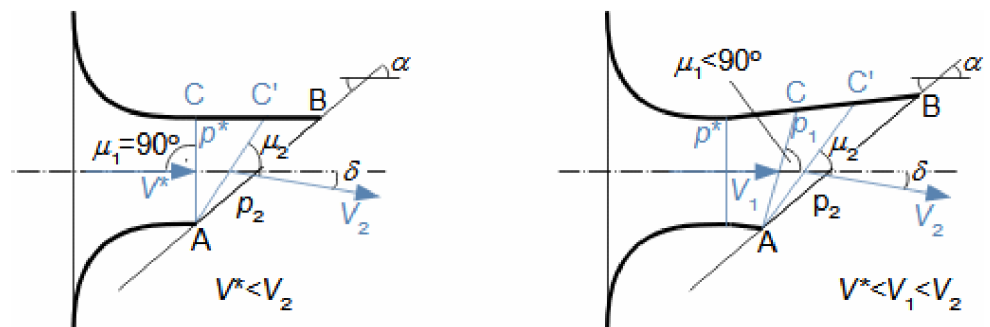
*Podexpandovaný  
stav trysek  
raketových motorů*

Změna protitlaku se projevuje i na konstrukci trysek raketových motorů. Během letu rakety v atmosféře se mění podle výšky vnější tlak, proto jsou trysky prvního stupně navrženy na expanzi do tlaku atmosférického (při zemi) a stupně následujícího na tlak mnohem nižší. Poslední stupeň je navržen pro expanzi do vakua. Čím větší rozsah tahu nabízí raketový motor, tím více musí být jeho tryska podexpandována. Při kolmém přistání rakety s málo podexpandovanou tryskou, proto musí být velmi přesný výpočet zážehu přistávacího motoru, protože jeho tah je de facto konstantní, takže zrychlení rakety a tah motoru se musí rovnat právě při dotyku rakety se zemí.

### Proudění v šikmo seříznuté trysce

*Při nadzvukovém proudění v šikmo seříznuté trysce dochází k odklonu proudu od osového směru  $\delta$  v důsledku expanzní vlny, která vzniká na hraně kratší strany trysky, viz **Obrázek 106**. Situace u šikmo seříznuté Lavalovy trysky je totožná s obtékáním tupého úhlu nadzvukovou rychlostí. Postup výpočtu odklonu proudu od osového směru  $\delta$  je uveden např. v [Kadrnožka, 2004, Rovnice 3.6-10] nebo lze použít i Prandtl-Meyerovy funkce.*

– 106: –



vlevo-konfuzorová tryska; vpravo-konvergentně-divergentní tryska.  $\alpha$  [°] úhel seříznutí trysky;  $\mu$  [°] Machův úhel;  $\delta$  [°] odklon proudu od osy trysky. Expanze plynu z tlaku  $p_1$  započne na linii A-C a dokončí se na linii A-C', na které se nastaví tlak  $p_2$ . Šikmo seříznutá Lavalova tryska není tedy tak citlivá na změnu protitlaku jako neseříznutá Lavalova tryska.

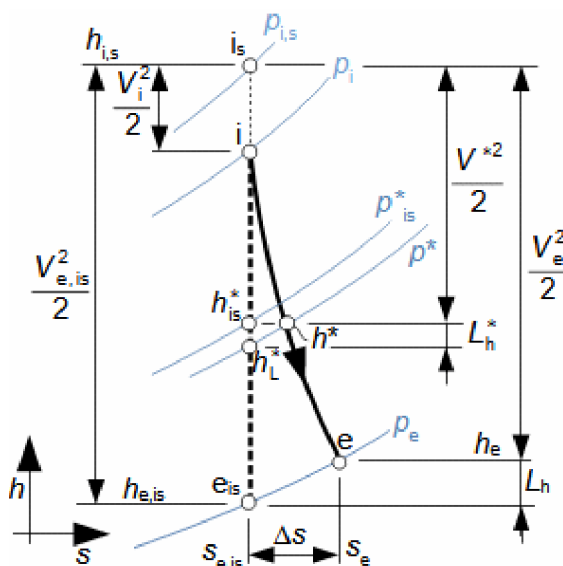
### Proudění tryskou se ztrátami

Pomineme-li nenávrhové stavy v trysce, pak ztráty, které v tryskách vznikají jsou způsobené zejména **vnitřním třením** plynu. Ztráty v trysce snižují nejen výtokovou rychlost, ale i **hmotnostní tok tryskou při proudění se ztrátami** je menší než při proudění beze ztrát.

~  
Vliv vnitřního tření  
plynu na expanzi v  
trysce

Vnitřní tření plynu a tření o stěny trysky způsobují disipaci energie ve formě třecího tepla, což zvyšuje entropii plynu a snižuje tak výslednou kinetickou energii plynu, viz **Obrázek 108**. Navíc se v proudu mohou vyvinout víry, ve kterých dochází k nežádoucím transformacím energie na stejném principu jako při škrábání, což také vede na zvyšování entropie.

— **108:** —  
h-s diagram expanze  
v trysce se ztrátami



$L_h$  [ $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ ] měrná ztráta  
v trysce. Index  $is$  označuje stav  
plynu pro případ izoentropické  
expanze.

Vliv vnitřního tření  
na rychlost v hrdle  
trysky

Při proudění se ztrátami se v trysce vytváří rychlostní profil, takže při tlaku  $p_{is}^*$  může nastat v jádru proudu rychlost zvuku přičemž na okrajích (v blízkosti stěn) je rychlost podzvuková a střední rychlost v hrdle trysky je menší, než je rychlost zvuku, respektive střední kinetická energie plynu je nižší, než odpovídá energii při rychlosti zvuku. Až při tlaku  $p^*$ , který je nižší než je  $p_{is}^*$ , je střední kinetická energie plynu taková, že odpovídá rychlosti zvuku v celém průtočném průřezu plynu. Navíc, jestliže v kritickém bodě  $h^*$  má plyn jiné termokinetické vlastnosti než v bodě  $h_{is}^*$ , pak kinetická energie rychlosti zvuku bude jiná než při izoentropické expanzi. To znamená, že se změní i entalpie  $h^* \neq h_{is}^*$ , ale tyto rozdíly mezi uvedenými body jsou velmi malé.

*Vliv vnitřního tření  
na účinnost trysky*

Ztrátu lze vypočítat z energetických parametrů trysky, kterými jsou rychlostní součinitel  $\varphi$  a účinnost trysky  $\eta$ , tyto dvě veličiny jsou definovány **Rovnicí 569**.

– **569:** –

$$\varphi = \frac{V_e}{V_{e, is}}; \quad \eta = \frac{h_{i, s} - h_e}{h_{i, s} - h_{e, is}} = \frac{V_e^2}{V_{e, is}^2} = \varphi^2$$

$\varphi$  [1] rychlostní součinitel;  $\eta$  [1] účinnost trysky. Hodnoty rychlostního součinitele  $\varphi$  pro trysky jsou uvedeny v [Dejč, 1967, s. 328] pro zužující se trysky a v [Dejč, 1967, s. 348] pro Lavalovy trysky.

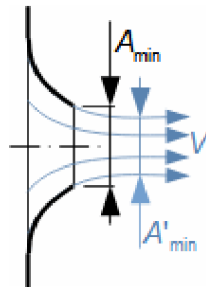
– **Úloha 109:** –

Navrhněte rozměry Lavalovy trysky kuželového tvaru, kterou protéká sytá vodní pára. Hmotnostní tok má být  $0,2 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ . Celkový tlak páry před tryskou je 200 kPa. Tlak páry za tryskou je 20 kPa. Rychlostní součinitel trysky je 0,95. Vypočítejte také účinnost této trysky. Řešení úlohy je uvedeno v **Příloze 109**.

~  
*Snížení hmotnostního  
toku tryskou kvůli  
kontrakci proudu*

Hmotnostní tok tryskou se může snížit nejen v důsledku vnitřního tření v tekutině, ale i v důsledku zúžení neboli kontrakce proudu (vena contracta) za hrdlem trysky [Jarkovský, 1958 s. 14]. Toto zúžení je způsobeno setrvačností proudu, působením okolní, nárůstem tloušťky mezní vrstvy v hrdle a má stejný dopad na průtok jako zmenšení průtočného průřezu trysky, viz **Obrázek 761**. U dobře provedených trysek je zúžení proudu velmi malé ( $A_{\min} \approx A'_{\min}$ ), naopak významné je u clon.

– **761:** –



$A'_{\min}$  [m<sup>2</sup>] průtočný průřez ve zúžení proudu.

*Výpočet  
hmotnostního toku  
tryskou pomocí  
průtokového  
součinitele trysky*

Skutečný průtok tryskou se vypočítá pomocí součinitele průtoku, který zahrnuje vliv vnitřního tření i zúžení proudu. Součinitel průtoku je definován jako podíl skutečného průtoku tryskou ku průtoku při izoentropické expanzi bez zúžení proudu, viz **Rovnice 478**. Hodnoty průtokových součinitelů některých typů trysek a clon jsou uvedeny v [Dejč, 1967], [Jarkovský, 1958].

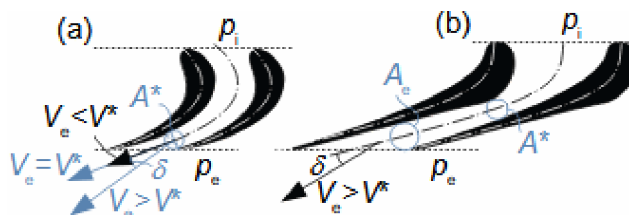
– **478:** –

$\mu = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{is}}$   $\mu$  [1] průtokový součinitel trysky;  $\dot{m}_{is}$  [kg·s<sup>-1</sup>] průtok tryskou při proudění beze ztrát.

### Tryska jako lopatkový kanál

Lopatkový kanál může mít tvar čistě konfuzorové trysky i Lavalovy trysky, viz **Obrázek 111**. Takový lopatkový kanál se chová jako šikmo seříznutá tryska. Lopatkové kanály ve tvaru Lavalovy trysky jsou používány v případech, kdy na jeho výtoku musí být nadzvuková rychlost pracovního plynu – například se používají u malých jednostupňových turbín a u posledních stupňů parních kondenzačních turbín.

– **111:** –  
 Situace na výtoku z lopatkové mříže při nadzvukovém proudění



(a) konfuzorový lopatkový kanál; (b) lopatkový kanál pro nadzvukové rychlosti.  $\delta$  [°] odklon nadzvukového proudu od osy kanálu, respektive větší deviačního úhlu lopatkové mříže.

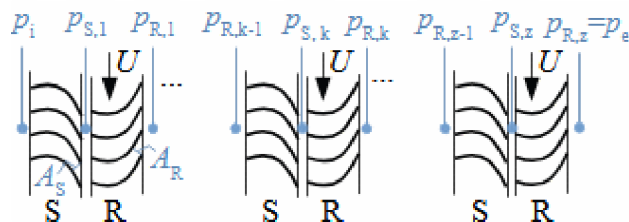
### Hmotnostní tok skupinou trysek, stupňů turbín a Stodolovo pravidlo

Teorie trysek se využívá i pro stanovení průtoku skupinou stupňů turbín za změněných podmínek před či za touto skupinou stupňů. Existuje hned několik výpočtových postupů, které ovšem byly vytlačeny numerickými výpočty. Proto si zde popíšeme pouze postup nejjednodušší, který má smysl používat při přibližných výpočtech, viz aplikace v článku *Provedení parních turbín*.

Lopatkové řady turbíny jako sériově řazení trysek

Lopatkové kanály jednoho stupně turbíny jsou tvořeny statorovou a rotorovou řadou lopatek, přičemž ta rotorová je umístěna na hřídeli, která se otáčí, viz **Obrázek 1272** a článek Úvod do lopatkových strojů. Lopatkové kanály v těchto řadách lze přirovnat ke dvou tryskám pracující v sérii, což znamená, že se jedná o trysky se stejným hmotnostním tokem. Stejný předpoklad lze aplikovat i na skupinu s více stupni, respektive na více trysek řazených za sebou.

– **1272:** –

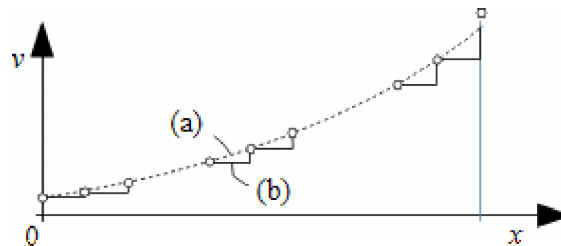


R-označení rotorové řady lopatek; S-označení statorové řady lopatek. Indexy: i-stav na vtoku do vyšetřované skupiny stupňů; k-tý stupeň turbíny; z-počet stupňů turbíny.

*Zjednodušující předpoklady k užití teorie trysek pro výpočet změny hmotnostního toku skupinou stupňů turbíny*

Uspokojivého výsledku přibližného výpočtu změny hmotnostního toku větší skupinou stupňů lze dosáhnout při zavedení dvou zjednodušujících předpokladů. Prvním je předpoklad adiabatické expanze a její konstantní hodnota exponentu polytropy  $i$  při změně hmotnostního toku. Druhým předpokladem je zjednodušení postupné změny měrného objemu plynu  $v$  ve stupni na změnu skokovou, při které se měrný objem mění skokově vždy na výtoku lopatkového kanálu, viz **Obrázek 1273**. Na základě těchto zjednodušení lze odvodit **Vzorec 994**.

– **1273:** –



(a) průběh změny měrného objemu ve více stupňové turbíně; (b) změna měrného objemu ve více stupňové turbíně podle zjednodušujícího předpokladu.  $v$  [ $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ] měrný objem pracovního plynu;  $x$  [m] délka vyšetřované skupiny stupňů.

– **994:** –

$$\left(\frac{\dot{m}}{\dot{m}_{\text{nom}}}\right)^2 \approx \frac{p_i v_{i,\text{nom}}}{v_i p_{i,\text{nom}}} \frac{1 - \left(\frac{p_e}{p_i}\right)^{\frac{n+1}{n}}}{1 - \left(\frac{p_{e,\text{nom}}}{p_{i,\text{nom}}}\right)^{\frac{n+1}{n}}}$$

Indexy: nom-jmenovitý stav.  
Odvození vzorce pro přibližný výpočet změny průtoku velkou skupinou stupňů turbíny je uvedeno v [Ambrož, et al., 1956, s. 315].

*Aplikace Bendemanovy elipsy při výpočtu změny hmotnostního toku skupinou stupňů turbín*

Obecný **Vzorec 994** má tu nevýhodu, že jeho řešení je velmi pracné v podobě iteračního výpočtu, do kterého vstupují odhady hodnot výstupních stavových veličin s hledáním kořene polynomu s obecným (nečelým) exponentem. Řešením je zjednodušení **Vzorce 994** použitím Bendemanovy elipsy na jednodušší kvadratickou **Rovnici 995**.

– **995:** –

$$\left(\frac{\dot{m}}{\dot{m}_{\text{nom}}}\right)^2 \approx \frac{p_{i,\text{nom}} v_{i,\text{nom}}}{p_i v_i} \frac{p_i^2 - p_e^2}{p_{i,\text{nom}}^2 - p_{e,\text{nom}}^2}$$

Odvození je uvedeno v [Kadrnožka, 1987, s. 181].

*Výpočet změny hmotnostního toku skupinou stupňů turbín při kritickém proudění*

Jestliže na poslední lopatkové řadě skupiny stupňů nastane kritický tlakový poměr, pak lze na tuto skupinu stupňů aplikovat poznatky pro kritický průtok tryskou. To znamená, že rovnice pro průtok by měla být stejná, jako když se jedná o výtok do vakua ( $p_e = 0$ ), viz **Vzorec 996**.

– **996:** –

$$\left(\frac{\dot{m}}{\dot{m}_{\text{nom}}}\right)^2 \approx \frac{p_i v_{i,\text{nom}}}{v_i p_{i,\text{nom}}}$$

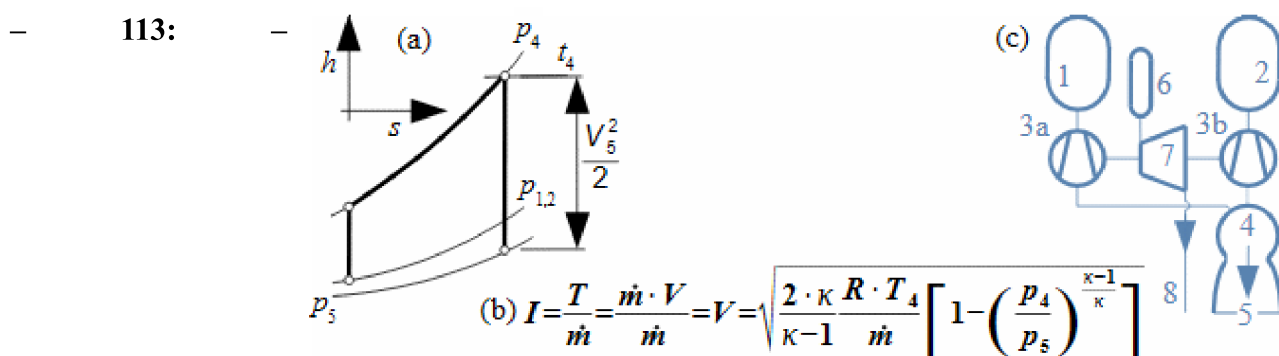
Odvozeno z **Rovnice 995** pro expanzi do vakua  $p_e = 0$ .

*Stodolovo pravidlo*

Uvedené vzorce pro průtok skupinou trysek poprvé odvodil Euler Stodola, a proto se označují jako Stodolovo pravidlo.

### Tryska raketového motoru

Tah raketového motoru je roven hybnosti výtokových spalín. Hlavní částí motoru je spalovací komora a na ni navazující Lavalova tryska. Ve spalovací komoře hoří okysličovadlo a palivo, tak vznikají spaliny, které expandují v trysce. Požadavkem na raketové palivo je, aby rychlost spalín byla co největší, protože to je způsob jak dosáhnout co nejvyššího poměru tahu ku spotřebě paliva (tento poměr se nazývá specifický impuls  $I$ , viz Obrázek 113).



(a) proces transformace energie palivové směsi v raketovém motoru; (b) rovnice pro ospecifický impuls raktového motoru; (c) schéma zapojení raketového motoru na kaplné pohonné látky. 1-okysličovadlo; 2-palivo; 3a-turbočerpadlo okysličovadla; 3b-turbočerpadlo paliva; 4-spalovací komora; 5-výtok spalín; 6-zdroj horkých plynů pro turbínu (u jiných motorů může být palivem pro turbínu palivo raketového motoru); 7-turbína; 8-výfuk turbíny.  $I$  [ $\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$ ] specifický impuls;  $R$  [ $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ] univerzální plynová konstanta;  $T$  [N] tah;  $R$  [ $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ] univerzální plynová konstanta;  $m$  [ $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ] molová hmotnost spalín.

Nejvhodnější  
pohonné látky  
raketových motorů

Z úpravy rovnice pro rychlost spalín na výtoku trysky je zřejmé, že jako palivo pro raketové motory jsou vhodné látky s vysokou teplotou hoření a malou molovou hmotností (například vodík, který má teplotu hoření s kyslíkem  $t_{\text{H}_2\text{O}} = 3244$  °C při molové hmotnosti  $m_{\text{H}_2\text{O}} = 18$   $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ).

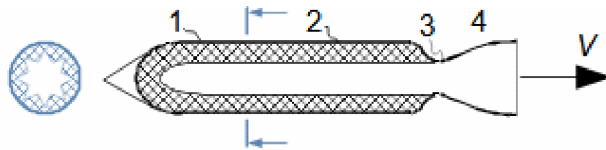
Motory SSME  
raketoplánu Space  
shuttle

Výkon raketového motoru je dán tlakem ve spalovací komoře a její velikostí. Například požadovaný tlak ve spalovací komoře motoru SSME raketoplánu Space shuttle byl 20,3 MPa a výkon turbíny turbočerpadla vodíku dosahoval 56 MW, při tahu 2278 kN [Růžička and Popelínský, 1986, s. 25], [Sutton and Biblarz, 2010].

~  
Raketové motory na  
tuhé pohonné látky

Existují i raketové motory na tuhé pohonné látky (TPL), ve kterých probíhá postupné odhořívání palivové směsi za vzniku velmi horkých spalin (**Obrázek 511**). Vektor tahu se u motorů s TPL často reguluje pomocí šikmé rázové vlny řízeně vznikající vstříkovaním kapaliny na vnitřní stranu trysky. Hvězdičkový průřez náplně paliva umožňuje postupné odhořívání palivové směsi a stabilní hoření. Tento hvězdicový tvar byl soustavně vyvíjen za druhé světové války v Anglii a vyvrcholil konstrukci balistické rakety na TPL typu Sergeant [Holt, 2017, s. 94-110].

– 511: –



1-spalovací komora; 2-směs paliva a okysličovadla; 3-kritický průřez trysky; 4-Lavalova tryska.

Možnosti regulace  
tahu raketových  
motorů na TPL

Nevýhodami motorů s TPL jsou omezená možnost regulace tahu a motor lze zažehnout jen jednou. Na druhou stranu jsou jednodušší než motory na kapalná paliva a především pohotovější (odpadá tankování paliva před startem) a mají i výrazně vyšší životnost při skladování, což je důležité pro vojenské využití. Existují i hybridní raketové motory, kde palivo je v tuhé formě a okysličovadlo je přiváděno z externí nádrže, tímto způsobem lze lépe regulovat tah. Motory na TPL lze také opakovaně používat, například první stupně raketoplánu Space shuttle, tzv. motory SRB.

## Odkazy

- ŠKORPÍK, Jiří, 2022, Základní rovnice lopatkových strojů, *turbomachinery.education*, Brno, <https://turbomachinery.education/zakladni-rovnice-lopatkovych-stroju.html>.
- ŠKORPÍK, Jiří, 2024, Technická termomechanika, *engineering-sciences.education*, Brno, <https://engineering-sciences.education/technicka-termomechanika.html>.
- ŠKORPÍK, Jiří, 2025, Provedení parních turbín, *turbomachinery.education*, Brno, <https://turbomachinery.education/provedeni-parnich-turbin.html>.
- ALLMAN, J. G., HOFFMAN, J. D., 1981, Design of maximum thrust nozzle contours by direct optimization methods, *AIAA journal*, Vol. 9, Nb 4, pp. 750-751.
- AMBROŽ, Jaroslav, BĚM, Karel, BUDLOVSKÝ, Jaroslav, MÁLEK, Bohuslav, ZAJÍC, Vladimír, 1956, *Parní turbíny II, konstrukce, regulace a provoz parních turbín*, SNTL, Praha.
- DEJČ, Michail, 1967, *Technická dynamika plynů*, SNTL, Praha.
- HADDAD, A., 1988, *Supersonic nozzle design of arbitrary cross-section*, Cranfield institute of technology, School of Mechanical Engineering.
- HOLT, Nathalia, 2017, *Vzestup raketových dívek: ženy, které nás hnaly kupředu: od raketových střel k Měsíci a Marsu.*, Knihy Omega, Praha, ISBN 978-80-7390-686-3.

- JARKOVSKÝ, Eduard, 1958, *Základy praktického výpočtu clon, dých a trubic Venturiho*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha.
- KADRNOŽKA, Jaroslav, 1987, *Parní turbíny a kondenzace*, VUT v Brně, Brno.
- KADRNOŽKA, Jaroslav, 2004, *Tepelné turbíny a turbokompresory I*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, ISBN 80-7204-346-3.
- KALČÍK, Josef, SÝKORA, Karel, 1973, *Technická termomechanika*, Academia, Praha.
- MAREŠ, Radim, ŠIFNER, Oldřich, KADRNOŽKA, Jaroslav, 1999, *Tabulky vlastností vody a páry, podle průmyslové formulace IAPWS-IF97*, VUTIUM, Brno, ISBN 80-2141316-6.
- MEERBEECK, W.B.A., ZANDBERGEN, B.T.C., SOUVEREIN, L.J., 2013, A Procedure for Altitude Optimization of Parabolic Nozzle Contours Considering Thrust, Weight and Size, *EUCASS 2013 5th European Conference for Aeronautics and Space Sciences*, Munich.
- NOŽIČKA, Jiří, 2000, Osudy a proměny trysky Lavalovy, *Bulletin asociace strojních inženýrů*, č. 23, ASI, Praha.
- RAO, G. V. R., 1958, Exhaust nozzle contour for optimum thrust, *Jet Propulsion*, Vol. 28, Nb 6, pp. 377-382.
- REKTORYS, Karel, CIPRA, Tomáš, DRÁBEK, Karel, FIEDLER, Miroslav, FUKA, Jaroslav, KEJLA, František, KEPR, Bořivoj, NEČAS, Jindřich, NOŽIČKA, František, PRÁGER, Milan, SEGETH, Karel, SEGETHOVÁ, Jitka, VILHELM, Václav, VITÁSEK, Emil, ZELENKA, Miroslav, 2003, *Přehled užití matematiky I, II*, Prometheus, spol. s.r.o., Praha, ISBN 80-7196-179-5.
- RŮŽIČKA, Bedřich, POPELÍNSKÝ, Lubomír, 1986, *Rakety a kosmodromy*, Naše vojsko, Praha.
- SLAVÍK, Josef, 1938, *Modifikace Pitotova přístroje a jeho užití při proudění plynu hubicí*, Elektrotechnický svaz Československý, Praha.
- SUTTON, George, BIBLARLZ, Oscar, 2010, *Rocket propulsion elements*, John Wiley & Sons, New Jersey, ISBN: 978-0-470-08024-5.