
VNITŘNÍ TŘENÍ TEKUTINY A VÝVOJ MEZNÍ VRSTVY

- 7.3 Proudění tekutiny
 - 7.4 Střední rychlosti proudění
 - 7.6 Tloušťka mezní vrstvy
 - 7.7 Viskozita
 - 7.9 Vstupní délka
 - 7.10 Laminární proudění
 - 7.13 Turbulentní proudění
 - 7.15 Zánik turbulencí
 - 7.16 Proudění bez tření
 - 7.18 Úloha 1: Výpočet charakteristických tlouštěk mezní vrstvy
Úloha 2: Návrh tenzoru napětí v tekutině
Úloha 3: Výpočet viskozity směsi plynu
Úloha 4: Odvození rovnic pro laminární proudění mezi dvěma deskami
Úloha 5: Vektorová analýza laminárního proudění
Úloha 8 v [Škorpík, 2022]: Aplikace potenčního proudění při výpočtu parametrů Kaplanovy turbíny
Úloha 9 v [Škorpík, 2022]: Aplikace potenčního víru při výpočtu rozměrů spirálního hrdla
 - 7.20 Odkazy
 - 7.21 - 7.41 Přílohy
-

autor: ŠKORPÍK, Jiří ([LinkedIn.com/in/jiri-skorpik](https://www.linkedin.com/in/jiri-skorpik))

datum vydání: Srpen 2023; Říjen 2025 (2. vydání)

název: Vnitřní tření tekutiny a vývoj mezní vrstvy

sborník: *fluid-dynamics.education*

provenience: Brno (Česká republika)

email: skorpik.jiri@email.cz

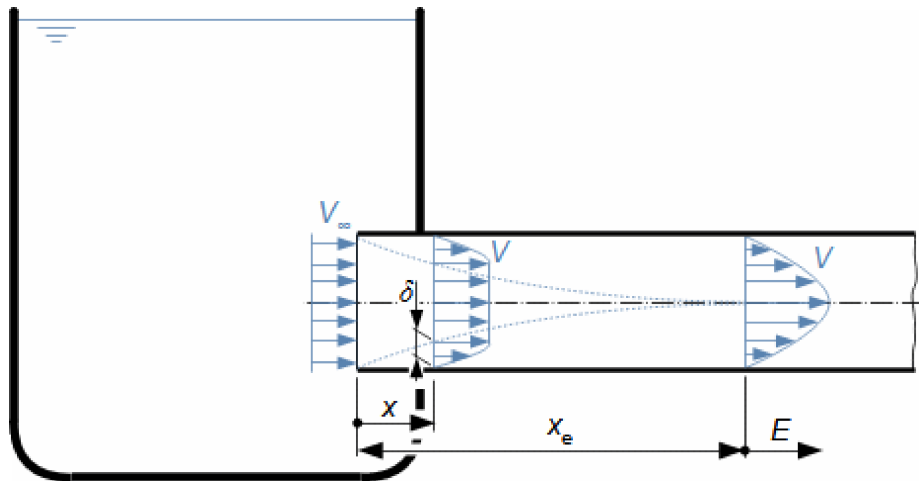
Copyright©Jiří Škorpík, 2023-2025
Všechna práva vyhrazena.

Proudění tekutiny

Vznik a vývoj rychlostního profilu v kanálu v důsledku vnitřního tření

Entropie proudící tekutiny se zvyšuje, což je způsobeno vnitřním třením tekutiny, které způsobuje, že část její kinetické energie se transformuje na vnitřní tepelnou energii tekutiny (dále označována jako ztrátové teplo). Dalšími projevy vnitřního tření je tlaková ztráta při proudění tekutiny kanálem a nižší rychlost proudění u okrajů kanálu a vyšší v uprostřed kanálu – rozložení rychlosti tekutiny ve vyšetřovaném řezu kanálu nazýváme rychlostní profil. Nicméně rychlostní profil se vyvíjí postupně. Na Obrázku 1 je znázorněn postupný vývoj rychlostního profilu tekutiny v potrubí na výtoku z nádoby při působení vnitřního tření. Vliv vnitřního tření započne až na vstupu do potrubí, kde dochází ke tření tekutiny o stěny kanálu, tato ztráta kinetické energie tekutiny se šíří směrem od stěn, a tím se postupně vyvíjí rychlostní profil. Současně se rychlost proudění v jádru proudu zvyšuje, aby byla zachována kontinuita proudu, protože v blízkosti stěn je rychlost naopak velmi nízká. Oblast ovlivněnou přítomností omočené stěny nazýváme mezní vrstvou proudění. V případě uzavřených kanálů se mezní vrstvy protilehlých stran, tak jak neustále rostou, po určité délce x_e spojí.

1:



E-oblast plně vyvinuté mezní vrstvy. V [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] rychlost proudění ve vyšetřovaném místě kanálu; V_∞ [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] rychlost proudění na vstupu vyšetřovaného úseku kanálu; x vzdálenost od vstupu do potrubí; x_e [m] vstupní délka; δ [m] tloušťka mezní vrstvy.

Proudění bez tření ideální tekutiny

Za účelem základních výpočtů složitých úloh v proudění a porovnávání definujeme ideální tekutinu, ve které neexistuje vnitřní tření a její tepelná kapacita je konstantní. Modely proudění s ideální tekutinou jsou k reálnému proudění tím bližší, čím je schopnost skutečné tekutiny produkovat vnitřní tření menší, viz kapitola Proudění bez tření.

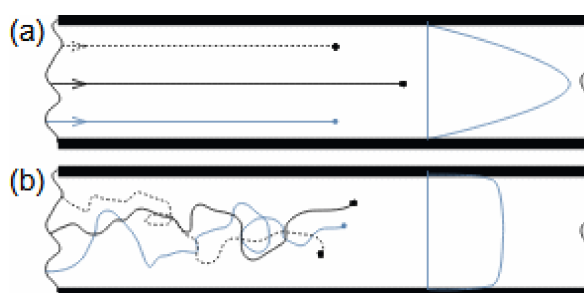
Supratekutost Helia

Nejblíže vlastnostem ideální tekutiny je kapalné Helium, které při teplotách pod 2 K neprodukuje vnitřní tření, tato vlastnost se nazývá supratekutost. Supratekutost také umožňuje existenci navzájem protiproudých proudění v jednom kanále bez vzniku tření.

Rozdíl mezi laminárním a turbulentním prouděním podle trajektorie proudění

Vývoj mezní vrstvy a rychlostního profilu je ovlivněn druhem proudění. Existují dva druhy proudění podle principu vzjemné interakce mezi částicemi proudění a přenosu kinetické energie proudu mezi nimi. Jedná se o proudění laminární a proudění turbulentní. Při laminárním proudění vytváří tekutina rovnoběžná proudová vlákna, přičemž tato vlákna po sobě klouzají (v rámci vlákna vytváří tekutina drobné víry). Tekutina v sousedních proudových vláknech se nepromíchává. Při turbulentním proudění již nelze identifikovat jednotlivá proudová vlákna a pohyb elementárních částic tekutiny je náhodný—částice z vyšší energií se přesouvají do oblasti s energií nižší a naopak. Na Obrázku 2 jsou uvedeny trajektorie (proudnice) částic, které jsou unášeny laminárním proudem a turbulentním proudem, viz také fotografie v [Wilkens et al., 2009]. Tyto částice jsou současně výrazně hmotnější než molekuly tekutiny, aby nemohla být ovlivněna Brownovým pohybem, ale současně na ně nemá významný vliv gravitační zrychlení. Nicméně i při turbulentním proudění převládají nižší rychlosti v blízkosti stěn a vyšší v jádru proudu. O tom za jakých okolností lze očekávat laminární nebo turbulentní proudění pojednává kapitola Turbulentní proudění.

2:



(a) typická charakteristika laminárního proudu a jeho rychlostní profil; (b) typická charakteristika turbulentního proudu a jeho rychlostní profil.

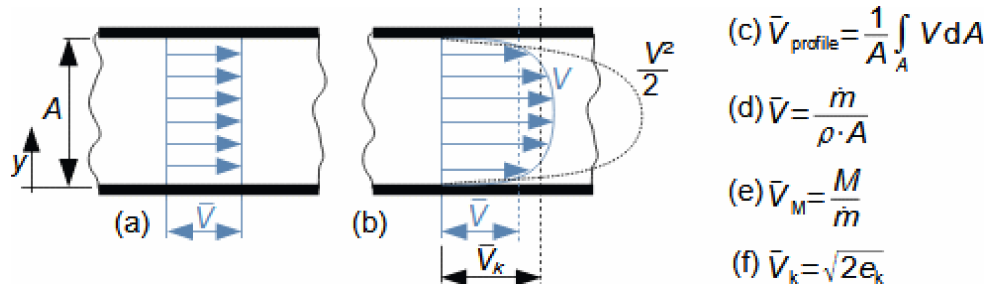
Střední rychlosti proudění

Velké množství parametrů proudu tekutiny se počítá ze střední rychlosti proudění, která může být vztažena k rychlostnímu profilu, k hmotnostnímu toku, k hybnosti tekutiny a nebo ke kinetické energii tekutiny.

Určení střední rychlosti z rychlostního profilu

3:
Příklady rychlostních profilů a definiční rovnice středních rychlostí proudění

Střední rychlost proudění odvozená z rychlostního profilu odpovídá střední hodnotě rychlostního profilu, viz Vzorec 3c.



(a) rychlostní profil mezi dvěma deskami v případě proudění bez tření; (b) rychlostní profil mezi dvěma deskami reálné tekutiny. A [m²] průtočný průřez; e_k [J·kg⁻¹] průměrná hodnota kinetická energie tekutiny; M [N] hybnost tekutiny v kanále; \dot{m} [kg·s⁻¹] hmotnostní tok; V [m·s⁻¹] místní rychlost tekutiny; \bar{V} [m·s⁻¹] střední rychlost proudění; y [m] souřadnice kolmá na směr proudění; ρ [kg·m⁻³] hustota.

Určení střední rychlosti z hmotnostního toku

Střední rychlost proudění odvozená z hmotnostního toku ve vyšetřovaném kanále je definována Vzorcem 3d. Je to tedy taková rychlost proudění, při které za jednotku času proteče kanálem stejné množství tekutiny odpovídající hmotnostnímu toku – jedná se nejčastěji užívanou střední rychlost proudění. Pro případ nestlačitelné tekutiny se hodnoty střední rychlosti stanovené z rychlostního profilu a hmotnostního toku rovnají ($\bar{V}_m = \bar{V}_{\text{profil}}$).

Určení střední rychlosti z hybnosti tekutiny

Střední rychlost proudění odvozená z hybnosti tekutiny ve vyšetřovaném kanále je definována Vzorcem 3e. Je to tedy taková rychlost tekutiny, při které by dosahovala stejné hybnosti (síla, kterou působí paprsek tekutiny na kolmou desku) jako skutečný proud tekutiny s rychlostním profilem.

Určení střední rychlosti z kinetické energie

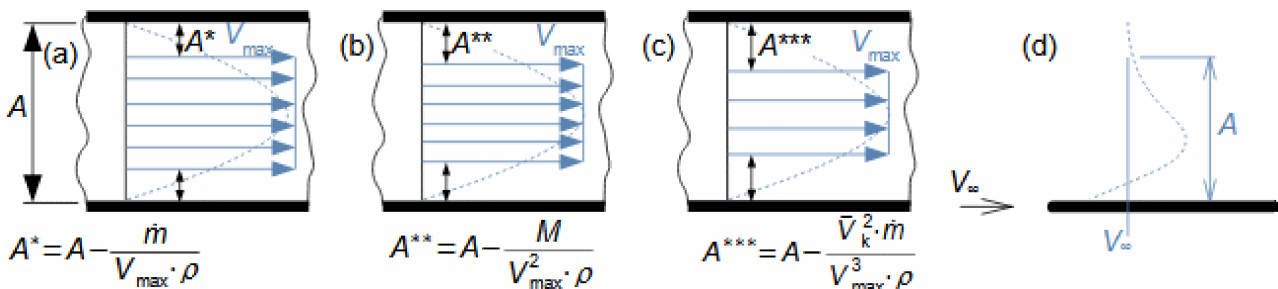
Střední rychlost proudění odvozená z kinetické energie tekutiny ve vyšetřovaném kanále je definována Vzorcem 3f. Při této rychlosti by proud dosahoval stejného výkonu jako skutečný proud s rychlostním profilem – používá se v energetických bilancích, například pomocí Bernoulliho rovnice, ve které vystupuje kinetická energie tekutiny.

Tloušťka mezní vrstvy

Tloušťka mezní vrstvy se vyhodnocuje z pohledu jejího vlivu na hmotnostní tok (Pošinovací tloušťka), hybnost (Impulsní tloušťka) a energii vyšetřovaného proudu (Energetická tloušťka). Tyto tloušťky jsou také použity při řešení Úlohy 1.

Výpočet tloušťky mezní vrstvy z hmotnostního toku

Ekvivaletní průtočný průřez, kterým by protékala pracovní tekutina maximální rychlostí a hmotnostním toku rovnající se rozdílu mezi průtokem bez tření a skutečném průtoku se nazývá pošinovací tloušťka mezní vrstvy, viz Rovnice 4a.



4:
Definiční rovnice
charakteristických
tloušťek mezní vrstvy

(a) pošinovací tloušťka; (b) impulsní tloušťka; (c) energetická tloušťka; (d) definice hranice ovlivněné oblasti v případě obtékání profilů. A^* [m²] průtočný průřez pošinovací tloušťky mezní vrstvy; A^{**} [m²] průtočný průřez impulsní tloušťky mezní vrstvy; A^{***} [m²] průtočný průřez energetické tloušťky mezní vrstvy; V_{\max} [m·s⁻¹] maximální rychlost proudění; V_{∞} [m·s⁻¹] nátoková rychlost (rychlost před obtékaným profilem). Rovnice jsou odvozeny v Příloze 6.

Výpočet tloušťky mezní vrstvy z hybnosti tekutiny

Ekvivaletní průtočný průřez, kterým by protékala pracovní tekutina maximální rychlostí o hybnosti rovnající se rozdílu mezi hybností tekutiny bez tření a skutečnou hybností tekutiny se nazývá impulsní tloušťka mezní vrstvy, viz Rovnice 4b.

Výpočet tloušťky mezní vrstvy z kinetické energie tekutiny

Ekvivaletní průtočný průřez, kterým by protékala pracovní tekutina maximální rychlostí o stejné kinetické energie jako je rozdíl mezi kinetickou energií tekutiny při proudění bez tření a kinetickou energií tekutiny při proudění se třením se nazývá energetická tloušťka mezní vrstvy, viz Vzorec 4c.

Definice tloušťky mezní vrstvy v případě obtékaných těles

Charakteristické tloušťky mezní vrstvy v okolí osamocených profilů a těles stanovují k nátokové rychlosti, přičemž hranice ovlivněné oblasti, ke které se stanovuje průtok, je ve vzdálenosti, ve které je rychlost proudění už velmi blízká nátokové rychlosti (nátoková rychlost dosahuje 99 % rychlosti V_A), viz Obrázek 4d.

*Aplikace
charakteristických
tloušťek mezní vrstvy*

Uvedené definice charakteristických tloušťek se používají při porovnávání různých typů kanálu mezi sebou z pohledu rychlostí, hybnosti a energetických ztrát, protože jsou aplikace, kde je důležitá, například, co nejmenší ztráta hybnosti a u jiné energetická ztráta a podobně.

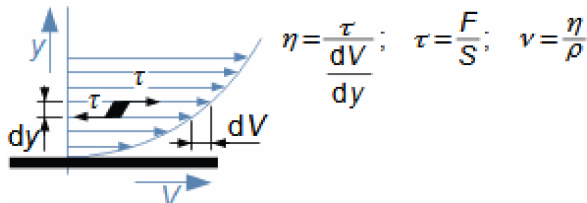
Viskozita

Vliv vnitřního tření na rychlostní profil při laminárním proudění lze kvalifikovat pomocí veličiny zvané dynamická viskozita (zkráceně jen viskozita, viz Definice viskozity). Hodnoty viskozit vyšetřovaných tekutin se používají pro výpočet parametrů proudu včetně tlakové ztráty.

Definice viskozity

Dynamická viskozita je poměr mezi tečným napětím a tenzorem rychlosti, viz definiční Rovnice 5. Tuto definici zavedl Issac Newton na základě jednoduchého experimentu s vnitřním třením tekutiny, který je popsán v Příloze 7.

5:



F [N] třecí síla působící na element; η [Pa·s] dynamická viskozita tekutiny; τ [Pa] tečné (smykové) napětí mezi proudovými vlákny způsobené třecí silou (tření mezi proudnicemi); ν [m²·s⁻¹] kinematická viskozita; S [m²] třecí plochy mezi vyšetřovanými vlákny.

*Newtonovská vs.
newtonovské tekutiny*

Tekutiny, u kterých lze uplatnit výše uvedenou definici viskozity nazýváme newtonovské tekutiny a naopak tekutiny, ve kterých se viskozita mění s rychlostí nazýváme nenewtonovské tekutiny (tekutiny obsahující větší shluky molekul jako koloidní roztoky, suspenze, emulze gely apod.).

*Newtonův zákon
viskozity*

Definice viskozity zapsaná Vzorcem 5 vychází z velmi jednoduchého případu proudění v rovině. Jestliže vyšetřujeme proudění prostorové, kdy se mění rychlostní profil ve více směrech, musíme vycházet z tenzoru tečných napětí v tekutině od vnitřního tření tekutiny (viz Úloha 2). Vztahy mezi jednotlivými tečnými napětími a viskozitou při proudění v prostoru se nazývají Newtonův zákon viskozity, který je uveden například v [Bird et al., 1965] pro různé soustavy souřadnic.

Hodnoty viskozit jsou funkcí teploty a tlaku

Dynamická viskozita tekutin se měří pomocí viskozimetrů, kterých je několik typů. Výsledky měření se uvádí do termodynamických tabulek, které se využívají při výpočtech. Problém získání komplexních dat hodnot viskozity je v tom, že viskozita tekutin závisí na teplotě a tlaku. Dynamická viskozita kapalin klesá s rostoucí teplotou a s rostoucím tlakem vzrůstá. Vliv tlaku je u většiny kapalin nevýznamný, vyjma velmi vysokých tlaků v řádech megapascalů. Dynamická viskozita plynů s rostoucí teplotou vzrůstá a je nezávislá na tlaku, vyjma extrémně nízkých nebo naopak vysokých tlaků. Z těchto důvodů se uvádí dynamické viskozity tekutiny pro technické účely pouze v závislosti na teplotě, viz Tabulky 6, 7 vody a páry a Tabulky 9, 10 suchého a vlhkého vzduchu. V případě nedostatku dat lze vypočítat přibližně viskozitu jako součin redukované a kritické viskozity. Redukovaná viskozita je funkcí tlaku a teploty, viz grafy v [Bird et al., 1965]. Kritická viskozita je viskozita látky v kritickém bodě.

6:
Viskozita vody při tlaku 101 325 Pa

<i>t</i>	0	10	20	30	40	50	60	70	80
<i>η</i>	1770,2	1303,9	1001,9	797,3	652,6	546,8	466,5	404,2	354,7
<i>v</i>	1769,7	1303,7	1003,3	800,46	657,46	553,2	474,28	413,22	364,84
<i>t</i>	90	100	110	120	130	140	150	160	170
<i>η</i>	314,7	281,8	254,7	232,05	212,9	196,54	182,46	170,24	159,55
<i>v</i>	325,87	293,92	267,84	246,05	227,74	212,22	198,97	187,6	177,78

t [°C] teplota; *η* [μPa·s]; *v* [nm²·s⁻¹]. Hodnoty od teploty 100 °C a výše jsou pro sytou vodu, tedy při vyšším tlaku odpovídající syté kapalině.

7:
Viskozita syté vodní páry

<i>t</i>	0	10	20	30	40	50	60	70	80
<i>η</i>	9,24	9,461	9,7272	10,01	10,307	10,616	10,935	11,26	11,592
<i>v</i>	1778	1005,8	561,81	329,12	201,15	127,68	83,837	56,747	39,474
<i>t</i>	90	100	110	120	130	140	150	160	170
<i>η</i>	11,929	12,269	12,612	12,956	13,301	13,647	13,992	14,337	14,681
<i>v</i>	28,141	20,511	15,251	11,547	8,8853	7,9770	5,4912	4,3983	3,5615

t [°C]; *η* [μPa·s]; *v* [nm²·s⁻¹].

Rovnice pro výpočet viskozity směsi

V technické praxi se velmi často pracuje se směsmi, jak plynnými, tak kapalnými, které se skládají ze dvou nebo více čistých látek. Viskozita směsi závisí na molárních koncentracích jednotlivých složek směsi, viz Rovnice 8 a také Úloha 3.

8:

$$\eta = \sum \eta_i \cdot \delta_i$$

η_i [Pa·s] dynamická viskozita jednotlivé složky směsi; *δ_i* [1] molární zlomek jednotlivé složky směsi. Rovnice je platná pro případy, kdy jsou jednotlivé viskozity nezávislé na parciálních tlacích jednotlivých složek.

9:
Viskozita suchého
vzduchu při 0,1 MPa

t	-20	0	10	20	40	60	80	100	150
η	16,28	17,08	17,75	18,24	19,04	20,10	20,99	21,77	23,83
ν	11,93	13,70	14,70	15,70	17,60	19,60	21,70	23,78	29,50
t	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
η	25,89	29,70	33	36,20	39,10	41,70	44,40	46,60	49,30
ν	35,82	48,20	63	79,30	96,80	115	135	155	178

t [°C]; η [$\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$]; ν [$\mu\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$].

10:
Viskozita vlhkého
vzduchu při 0,1 MPa

t	10	20	40	60	80	100
ϕ	η	η	η	η	η	η
0,2	17,73	18,20	18,91	19,75	20,15	20,12
0,4	17,71	18,16	18,79	19,43	19,45	18,96
0,6	17,69	18,12	18,67	19,13	18,86	18,10
0,8	17,67	18,09	18,56	18,85	18,35	17,43
1	17,65	18,05	18,45	18,59	17,91	16,90
	ν	ν	ν	ν	ν	ν
0,2	14,67	15,63	17,35	18,86	19,77	19,66
0,4	14,63	15,56	17,11	18,17	18,16	16,75
0,6	14,60	15,49	16,87	17,53	16,80	14,60
0,8	14,57	15,43	16,64	16,93	15,62	12,93
1	14,54	15,36	16,42	16,38	14,60	11,61

t [°C]; η [$\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$]; ν [$\mu\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$]; ϕ [1] relativní vlhkost vzduchu

Vstupní délka

Výpočet vstupní délky a
Reynoldsova čísla

Rychlostní profil po celé vyšetřované délce nemusí být stálý, zvláště jedná-li se o vstupní úsek do zkoumaného kanálu/potrubí, ve kterém teprve dochází ke vzniku mezní vrstvy, viz Obrázek 1. Vstupní délka kanálu x_e , na které dochází k vývoji mezní vrstvy, je funkcí tvaru kanálu a poměru mezi dynamickým tlakem a smykovým napětím v tekutině, který označujeme jako Reynoldsovo číslo Re , viz Vzorce 11.

11:

$$x_e \geq C_h \cdot L \cdot Re; \quad Re = \frac{\bar{V} \cdot L}{\nu}$$

C_h [m] součinitel hydraulické vstupní délky (viz níže); L [m] charakteristický rozměr (viz níže); Re [1] Reynoldsovo číslo (do vzorce pro x_e dosazujeme Re při plně vyvinuté mezní vrstvě) – vzorec pro Re je odvozen v Příloze 8.

Součinitel hydraulické
vstupní délky pro
potrubí

Hodnoty součinitele hydraulické vstupní délky pro trubku kruhového průřezu jsou v rozsahu $C_h \approx 0,025 \dots 0,065$ – hodnotu 0,065 odvodil francouzský fyzik a matematik Joseph Boussinesq (1842-1929), hodnotu 0,025 německý fyzik Ludwig Schiller (1882-1961). Přičemž lze říci, že vyšší hodnoty odpovídají kratším a nižší delším x_e [Bauer et al., 1950, s. 143]. Součinitelé C_h pro kanály jiných než kruhových průřezů jsou uvedeny v [Latif, 2006, s. 208] a výběr v Tabulce 12.

12:

Součinitelé
hydraulické vstupní
délky kanálů
obdelníkového tvaru

	C_h		C_h
$t=h$	0,09	$h=4 \cdot t$	0,075
$h=2 \cdot t$	0,085	$h \cdot t^{-1} \approx \infty$	0,011

C_h [m]; h [m] delší strana obdélníku; t [m] kratší strana obdélníku.

Výpočet
charakteristického
rozměru (ekvivalentní
průměr) kanálu
nekrhových tvarů

Charakteristický rozměr ve Vzorcích 11 zohledňuje rozměr průtočného kanálu, nebo obtékaného tělesa. Je to rozměr, ke kterému se provádí případná měření. Charakteristický rozměr uzavřených kanálů je nejčastěji definován Vzorcem 13 – v případě kruhového průřezu je to průměr, proto se charakteristický rozměr nazývá i ekvivalentním průměrem. Existuje ale i řada atypických případů, u kterých je použita jiná definice charakteristického rozměru. Obecně charakteristickým rozměrem těles bývá rozměr, který má největší vliv na proudění (například u lopatkových profilů je to délka tělivity).

13:

$$L = \frac{4 \cdot A}{u}$$

A [m²] průtočná plocha; u [m] omočený obvod kanálu (obvod průtočného průřezu kanálu, který je ve styku s proudící tekutinou).

Laminární proudění

Základní parametry laminárního proudění lze určit pomocí Navier-Stokesovy rovnice. Přičemž speciálními tvary Navier-Stokesovy rovnice pro případ nevýznamného vlivu viskozity je i Eulerova rovnice hydrodynamiky. Navíc lze pomocí Navier-Stokesovy rovnice odvodit rovnice pro tlakovou ztrátu nebo ztrátové teplo pro případy kanálů jednoduchých tvarů, například Poiseuilleův zákon pro tlakovou ztrátu v kruhovém potrubí, vztah mezi střední rychlostmi určené z hmotnostního toku a kinetické energie tekutiny apod.

Obecný tvar Navier-Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou tekutinu

Množství ztrátového tepla roste ve směru proudění, odtud a pomocí definice viskozity, lze odvodit rovnici laminárního pohybu tekutiny nazývanou také jako Navier-Stokesovu rovnicí, viz Rovnice 14. Uvedenou rovnici na základě kinetiky pohybu molekul odvodil francouzský inženýr Claude-Louis Navier (1785-1836). Irský matematik George Gabriel Stokes (1819-1903) je v názvu přidán na počest, protože s rovnicí dále experimentoval a hlouběji popsal její možnosti, i když vědců, kteří ji rozvinuli bylo více.

14:

$$-\frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{g}; \quad \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{V} = -\text{grad } L_q; \quad dL_q = (\text{grad } L_q) \cdot d\vec{s}$$

g [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$] gravitační zrychlení; $\text{grad } L_q$ [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$] gradient ztrátového tepla (množství ztrátového tepla uvolněného v 1 kg tekutiny při posuvu o 1 m daným směrem); p [Pa] tlak; s^{\rightarrow} [m] jednotkový směrový vektor; $(V \cdot \nabla)V$ [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$] změna (gradient) kinetické energie ve směru proudění. Rovnice je odvozena pro případ ustáleného laminárního proudění viskózní tekutiny při konstantní hustotě v Příloze 9, pro obecný případ nestacionárního proudění s proměnnou hustotou je Navier-Stokesova rovnice odvozena v [Bird et al., 1965], kde je označována jako rovnice pohybu.

Význam ztrátového tepla v Navier-Stokesově rovnici

Ztrátové teplo L_q je příčinou rostoucí entropie tekutiny. Zvýšení ztrátového tepla může docházet nejen při tření, ale i při víření mezi jednotlivými proudnicemi. U plynů se část ztrátového tepla, respektive vnitřní tepelné energie může zpět transformovat na tlakovou, kinetickou nebo potenciální energii a práci. To je způsobeno tím, že při zvýšení teploty se zvětší měrný objem plynu. Pro tuto energii se používá v teorii lopatkových strojů pojmu teplo znovu využité [Škorpík, 2024]. Z rovnice ztrátového tepla také plyne, že plyn při velmi malé hustotě, respektive tlaku, může mít velmi vysoké vnitřní tření.

Eulerova rovnice hydrodynamiky jako zjednodušená Navier-Stokesova rovnice pro proudění bez tření

Eulerova rovnice hydrodynamiky (Rovnice 15) je rovnice odvozená ze silové rovnováhy elementu tekutiny bez uvažování vlivu třecích sil na tento element. Lze ji jednoduše získat z Rovnice 14 pro případ, že levá strana se rovná 0. Z Rovnice 15 je dobře patrné, že skalární násobek vektoru rychlosti a divergence rychlosti $(V \cdot \nabla)V$ je zrychlení tekutiny, které lze rozepsat do tvaru Rovnice 15 (vlevo) jako součet gradientu kinetické energie rychlosti a vektorových součinů rychlosti – to znamená, že laminární proudění není potenciální, protože v případě potenciálního proudění je zrychlení rovno pouze gradientu kinetické energie.

15:

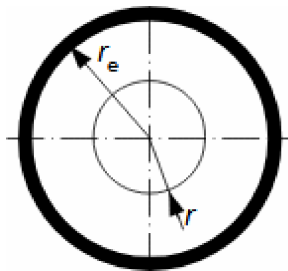
$$\vec{a} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \qquad (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) + \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$$

Odvození Eulerovy rovnice hydrodynamiky pro vírové proudění a souvislosti s potenciálním prouděním jsou uvedeny v Příloze 10.

Řešení Navier-Stokesovy rovnice pro laminární proudění v potrubí se označuje jako Poiseuilleův zákon

Odvození rovnic pro tlakovou ztrátu a rychlost tekutiny při laminárním proudění v kanálech jednoduchých tvarů není pomocí Navier-Stokesovy rovnice obtížné, viz Úloha 4 pro proudění mezi dvěma deskami a Rovnice 16 pro potrubí kruhového průřezu. Rovnice pro laminární proudění kruhovým průřezem poprvé odvodil německý inženýr Gotthilf Hagen (1797-1884) a francouzský fyzik Jean Poiseuille (1797-1869), proto se někdy označují jako Poiseuilleův zákon. Platnost této rovnice (mimo velmi krátkých úseků) potvrdil německý inženýr původem z Gruzie Johanna Nikuradseho (1894-1979).

16:



$$L_p = 8 \frac{Q \cdot l \cdot \eta}{\pi \cdot r_e^4} = 8 \frac{\bar{V} \cdot l \cdot \eta}{r_e^2}$$

$$V = 2 \frac{Q}{\pi r_e^4} (r_e^2 - r^2) = 2 \frac{\bar{V}}{r_e^2} (r_e^2 - r^2)$$

$$L_q = \frac{L_p}{\rho} = 8 \frac{\eta \cdot \bar{V} \cdot l}{\rho \cdot r_e^2}$$

L_p [Pa] tlaková ztráta na vyšetřované délce potrubí; l [m] délka potrubí; r_e [m] vnitřní poloměr potrubí; Q [$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$] objemový tok; r [m] vzdálenost vyšetřovaného poloměru od středu (osy) potrubí; V [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] axiální složka rychlosti (ve směru osy potrubí). Vztah je odvozený v Příloze 11 pro případ ustáleného proudění nestlačitelné tekutiny v kruhového potrubí, při vynechání vlivu potenciální energie z Navier-Stokesovy rovnice.

Rovnice střední rychlosti laminárního proudění

Odvození rovnic pro střední rychlost laminárního proudění podle jejich definičních Rovnic 3 je pro jednoduché tvary kanálů snadný, viz Rovnice 16 a Rovnice 17 pro střední rychlosti v potrubí a laminární proudění mezi dvěma deskami.

17:

$$(a) \bar{V} = \sqrt{\frac{5}{3}} e_k = \sqrt{\frac{5}{6}} \bar{V}_k \quad (b) \bar{V} = \sqrt{e_k} = \sqrt{\frac{1}{2}} \bar{V}_k$$

(a) rovnice střední rychlosti proudění při laminárním proudění tekutiny mezi dvěma deskami; (b) rovnice střední rychlosti proudění při laminárním proudění tekutiny trubkou. Rovnice byly odvozeny pro konstantní hustotu tekutiny $\rho = \text{konst.}$

Odvození rovnic je uvedeno v Příloze 12.

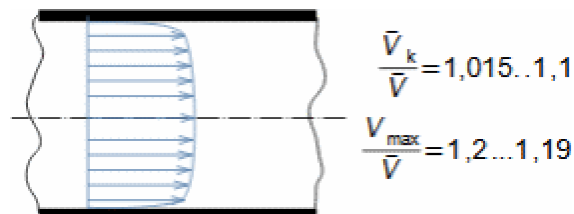
Turbulentní proudění

Mezi proudnicemi laminárního proudění působí na elementy tekutiny dvojice sil (viz Obrázku 5), tato dvojice sil uvadí elementy do rotace. To znamená, že mezi jednotlivými proudnicemi vzniká řada drobných vírů, které svou energii maří třením, respektive jejich kinetická energie je konstantní, nicméně při vyšších rychlostech energie ve vírech postupně roste. Nakonec mohou víry získat takovou energii, že začnou narušovat hranice proudnic a dochází k vzájemnému promíchávání proudu a sdílení energií. Nastává turbulentní proudění, které má obvykle velmi rozdílný rychlostní profil od rychlostního profilu laminárního proudění. Rychlost, při které toto nastane se nazývá kritická rychlost laminárního proudění, kterou lze vypočítat z kritického Reynoldsova čísla pro daný případ. Při této rychlosti setrvačné síly částic převažují nad třecí silou.

Turbulentní rychlostního profil v potrubí

Turbulentní rychlostní profil je charakteristický tím, že u něj nejsou patrné tak výrazné rozdíly mezi rychlosti v jádru a na okrajích proudu jako u laminárního rychlostního profilu, viz Obrázek 18. To je dáno migrací částic tekutiny a tedy i kinetické energie v celém průtočném průřezu (viz Obrázek 2). Tvar rychlostního profilu turbulentního proudění lze stanovit podle rovnic uvedených například v [Bird et al., 1965].

18:



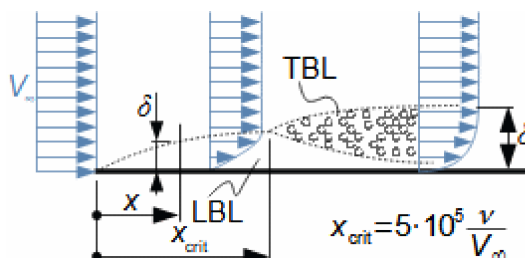
1-rychlostní profil laminárního proudění; 2-rychlostní profil turbulentního proudění. V_{\max} [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] maximální rychlost v turbulentním profilu. Data pro poměry rychlostí [Mašovský, 1964, s. 78], [Mikula et al., 1974, s. 57].

Vstupní délka turbulentního proudění

Kritická rychlost proudění nezaručuje existenci turbulencí v celém vyšetřovaném objemu tekutiny. Turbulentní proudění se vyvíjí z laminárního proudění při nárůstu setrvačných sil v mezní vrstvě, viz Obrázek 20. Například plně vyvinuté turbulentní proudění v potrubí se nachází až v oblasti potrubí vzdálené od ústí 10 až 60 průměrů potrubí [Jícha, 2001, s. 66].

20:

*Vývoj turbulenci při
obtékání desky*



LBL-laminární mezní vrstva (laminar boundary layer); TBL turbulentní mezní vrstva (turbulent boundary layer). δ [m] lokální tloušťka mezní vrstvy; x [m] vzdálenost od okraje; x_{crit} [m] začátek přechodu z laminární do turbulentní mezní vrstvy (vzorec z [Latif, 2006, s. 296]).

*Zkrácení vstupní délky
pomocí turbulizátorů*

Délka úseku, na které začne proudění turbulizovat také záleží na geometrii vstupu, kde se mohou narušovat proudnice o vstupní hrany a také na drsnosti povrchu. Na tomto principu fungují tzv. turbulizátory, která mají za úkol zkrátit vstupní délku, například pro potřeby promíchávání proudů, nebo pro potřeby rovnoměrného rozložení kinetické energie a hybnosti proudu jako jedno z opatření ke snížení citlivosti na odtržení proudění od stěn difuzorů a pod.

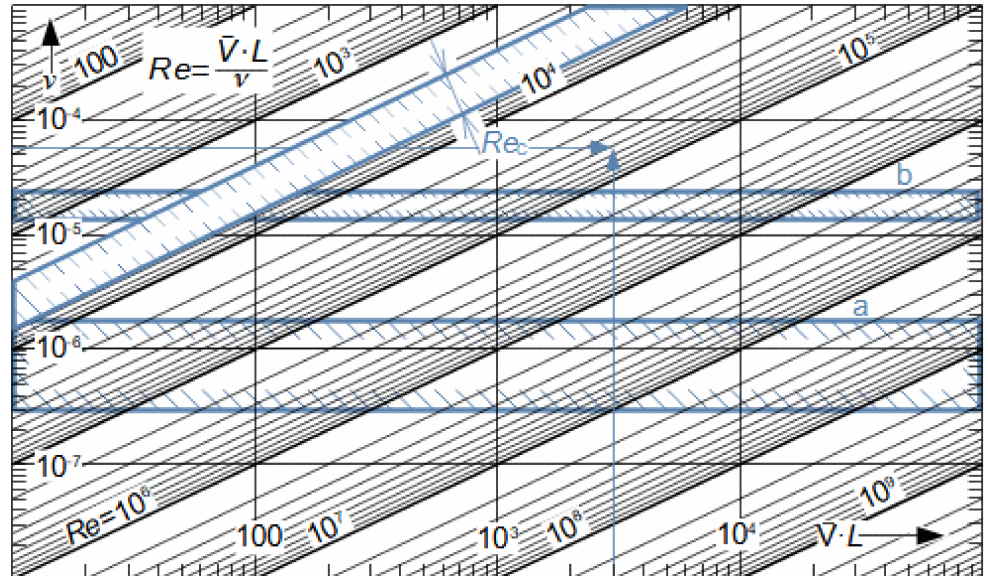
*Hodnoty kritických
Reynoldsových čísel v
potrubí*

Hodnotu kritické rychlosti, při které začne docházet k tvorbě turbulencí lze určit z kritického Reynoldsova čísla Re_c . Hodnota kritického Reynoldsova čísla pro potrubí získána experimentálně je $Re_c=2320$. Nicméně, ale v některých případech může být i vyšší, proto se rozmezí $Re=2320$ do $Re=5000$ až 6000 označuje jako přechodová oblast. To znamená, že při těchto hodnotách je jistá pravděpodobnost jak pro laminární tak turbuletní proudění. Od $Re=6000$ (tzv. horní kritické Reynoldsovo číslo) je proudění vždy turbulentní. Je třeba zdůraznit, že v praxi tyto hodnoty budou nižší, protože zde uvedené hodnoty pochází z měření v laboratořích na dokonale uložených potrubích bez vibrací.

*Pravděpodobnost
překročení kritického
Reynoldsova čísla*

Na Obrázku 19 je nomogram pro výpočet Reynoldsova čísla s vyznačením přechodové oblasti při proudění v potrubí. Z nomogramu mimo jiné vyplývá, že laminární proudění v běžných případech nastává jen za velmi vysokých hodnot kinematických viskozit a nízkých rychlostí – nejpravděpodobněji se s ním lze setkat u vzduchovodů malých průměrů – jinak jsou Reynoldsova čísla výrazně větší než kritické Reynoldsovo číslo.

19:
Nomogram pro
odečet
Reynoldsových čísel



V [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$]; L [mm]; ν [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]; Re [1]. a-rozsah kinematických viskozit vody mezi 0 °C a 100 °C; b-rozsah kinematických viskozit suchého vzduchu mezi 0 °C a 100 °C. Re_c [1] rozsah kritických Reynoldsových čísel pro potrubí.

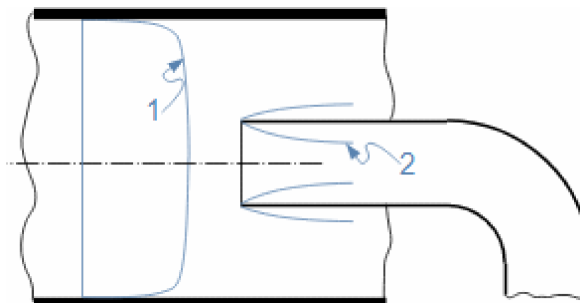
Zánik turbulencí

Vznik laminární mezní
vrstvy

Turbulentní proudění může zpět přejít do laminárního, jestliže klesne Reynoldsovo číslo pod kritické Reynoldsovo číslo. Například, vložíme-li do turbulentního proudění desku, tak na jejích obou stranách se vytvoří laminární mezní vrstva, viz Obrázek 20. Další příkladem je změna průměrů potrubí, jak je naznačeno na Obrázku 21. V tomto případě je nasáván turbulentní proud vloženou trubkou v jejíž ústí se vytváří laminární mezní vrstva, která, jestliže je v tomto kanálu Reynoldsovo číslo dostatečně nízké, se může spojit a může vytvořit laminární profil v celém průřezu. Stejný efekt vzniku laminární vrstvy lze sledovat i při proudění v lopatkových kanálech, i když na vstupu je turbulentní proud. Vložky v proudu, ve kterých má vzniknout nebo udržet laminární vrstva se nazývá laminátor.

21:

Příklad přechodu
turbulentního
proudění do
laminárního



1-plně vyvinutý turbulentní profil; 2-oblasti vzniku laminárních mezních vrstev.

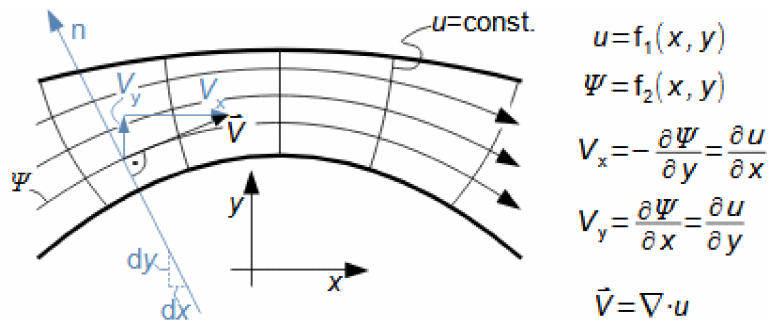
Proudění bez tření

Modely proudění ideální tekutiny bez tření, zejména analytické, se používají v první iteraci návrhu proudových strojů. Na základě výsledků těchto modelů lze zkonstruovat počítačový model formátu CAD, který lze dále optimalizovat pomocí numerických modelů. Proudění bez tření je založeno na předpokladu nevírového pohybu. Takový předpoklad je založen na pozorování i na formách transformace energie v tekutině. Nevírový pohyb tekutiny splňuje podmínky potenciálního vektorového pole, a proto, pro popis proudění bez tření používáme matematický model potenciálního proudění, tj. jeho veličiny jako rychlost i vektor rychlosti, hustota, tlak atd. jsou potenciální veličiny závislé pouze na souřadnicích, což je vlastnost, kterou od analytického popisu očekáváme. Odtud plyne mnoho matematicky unikátních vlastností. Model potenciálního proudění je dobře řešitelný a při vhodně vybraných podmínkách dává výsledky blízké reálnému proudění se třením.

Konstrukce proudnic
potenciálního
proudění

Funkci, která popisuje proudnice se označuje jako proudová funkce a vektory rychlosti jsou tečnami této funkce. Vektory rychlosti potenciálního proudění jsou také gradienty nějaké potenciální veličiny u , kterou nazýváme potenciálem rychlosti, viz Obrázek 22. Gradienty v potenciálním vektorovém poli jsou kolmé na hladiny potenciálů, takže proudová funkce musí být kolmá na funkci popisující křivku $u=\text{konst}$. Obě funkce lze odvodit pomocí matematických pravidel pro potenciální vektorové pole, viz Obrázek 22. Například pro konstrukci proudnic stačí znát křivku konstantních hodnot potenciálů rychlosti a obráceně, viz také aplikace při odvození rychlosti v potenciálním víru níže. Křivku $u=\text{konst}$. lze získat i graficky pomocí normál obtékaných ploch, protože okrajové proudnice kopírují tyto plochy apod.

22:
Rovnice
potenciálního
proudění v rovině



$u=f_1(x, y)$ [m²·s⁻¹] potenciál rychlosti; $\psi=f_2(x, y)$ proudová funkce. Odvození rovnic pro potenciální proudění v rovině je uvedeno v Příloze 13.

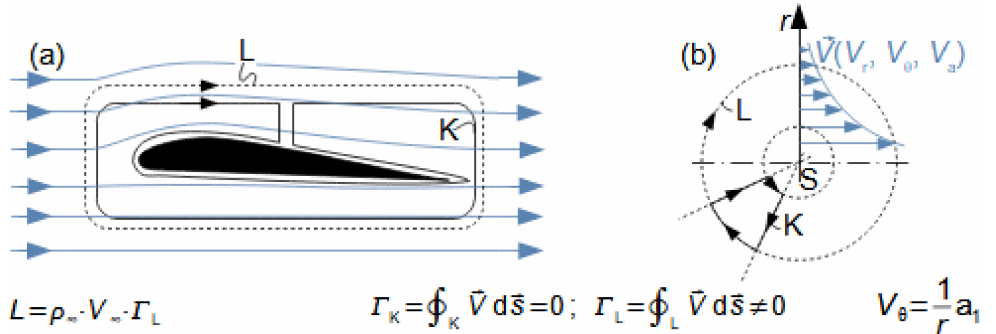
Zrychlení tekutiny

Na základě matematických vzorců odvozených pro potenciální vektorové pole (viz článek Technická matematika [Škorpík, 2023]) lze také dokázat, že zrychlení tekutiny při potenciálním proudění je rovno gradientu její kinetické energie.

Cirkulace rychlosti
indikuje vztlak tělesa

Cirkulace rychlosti potenciálního proudění po uzavřené křivce musí být rovna nule. Pokud uvnitř křivky je těleso nebo singularita, pak je cirkulace nenulová, s tím, že výsledné číslo je jistá konkrétní informace o těchto objektech uvnitř křivky. Pokud se jedná o těleso uvnitř potenciálního proudění (Obrázek 23a), respektive křivky, po které provádíme cirkulaci, pak výsledek cirkulace je přímo úměrný vztlaku tohoto tělesa.

23:
Příklady cirkulace
rychlosti
potenciálního
proudění



(a) cirkulace rychlosti kolem obtékaného tělesa; (b) potenciální vír. L [N·m⁻¹] vztlak profilu tělesa; ρ_∞ [kg·m⁻³] hustota před obtékaným tělesem; a_1 [m²·s⁻¹] konstanta; V_θ [m·s⁻¹] obvodová složka rychlosti; K, L-křivky, po kterých je provedena cirkulace rychlosti. Více informací o potenciálním víru a odvození rovnice pro obvodovou rychlost je uvedeno v Příloze 14.

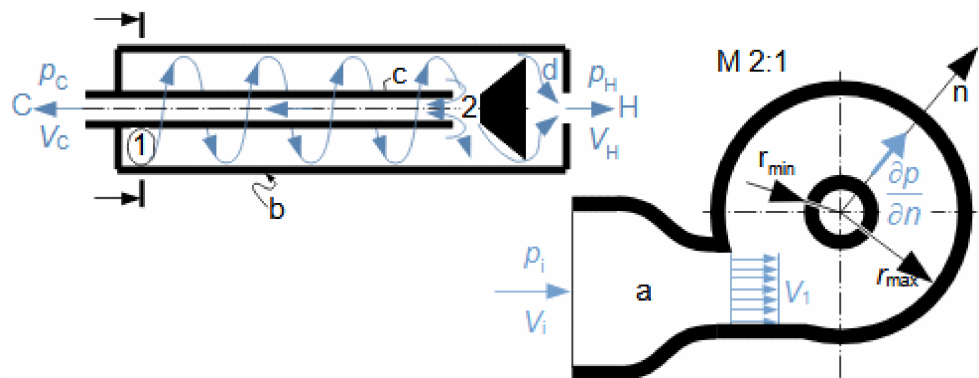
Potenciální vír

Potenciální proudění po kruhových proudnicích vytváří tzv. potenciální vír Obrázku 23b – typický model proudění bez tření kolem osy v turbínách a dalších lopatkových strojích. Výsledek cirkulace po kružnici-L kolem středu potenciálního víru je roven součinu rychlosti a obvodu kruhové dráhy, na které se provádí cirkulace.

*Využití efektu
potenciálního víru ve
vírových trubiciích*

Potenciální vír je velmi blízký vírům, které v přírodě vznikají ve vodě i ve vzduchu jako tornádo. Pro potenciální víry je typická velmi vysoká rychlost proudění blízko středu víru a tudíž podle zákona zachování energie musí směrem ke středu klesat tlaková a vnitřní tepelná energie a naopak. Tento efekt se využívá v tzv. vírových trubiciích (Obrázek 24) k separaci studeného nebo teplého plynu – pak je tento plyn odebírán podle toho, zda je pro danou aplikaci potřeba něco ohřívat nebo ochlazovat. V případě kapalin se zařízení využívající rozložení energie ve víru nazývá vírové čerpadlo, kdy středem vírové trubice je čerpána kapalina.

24:
*Schéma vírové
trubice*



a-tryska; b-plášť trubice; c-vnitřní kanál; d-štěrbina u obvodu trubice pro odvod horkého stlačeného plynu; C-výtok studeného plynu; H-výtok horkého plynu. 1-tangenciální vtok plynu do trubice; 2-odběr studeného plynu. $\frac{\partial p}{\partial r}$ [Pa·m⁻¹] gradient tlaku.

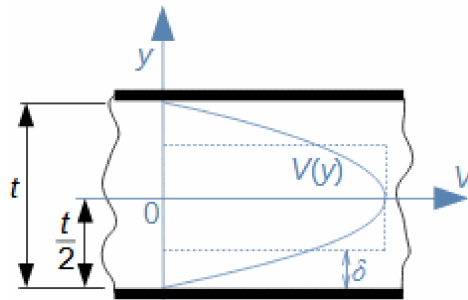
*Paradox rychlosti
laminárního proudění*

Na rovnicích laminárního proudění lze pozorovat zajímavý paradox. Jedná se o proudění, kde některé veličiny jsou potenciální, například rychlost tekutiny v potrubí (Vzorec 16) nebo mezi dvěma deskami (Úloha 4), ale další již ne, například vektor této rychlosti již nevytváří potenciální vektorové pole – není gradientem potenciální funkce, viz Úloha 5.

Úlohy

Úloha 1:

Vypočítejte charakteristické tloušťky mezní vrstvy pro proudění mezi dvěma deskami, jestliže by byl rychlostní profil parabolický. Maximální rychlost proudění, šířku, výšku kanálu a hustotu tekutiny si zvolte. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 1.



t [m] vzdálenost desek; δ [m] charakteristická tloušťka mezní vrstvy.

§1	zadáni:	$V_{\max}; t; h; \rho$	§4	výpočet:	$M; A^{**}; \delta^{**}$
§2	výpočet:	$A; m; V^-$	§5	výpočet:	$V_k^-; A^{***}; \delta^{***}$
§3	výpočet:	$A^*; \delta^*$			

Výpočet je proveden v Příloze 1.

Úloha 2:

Určete tvar tenzoru napětí v tekutině při laminárním proudění mezi dvěma deskami, jestliže ve vyšetřovaném bodě je tlak p . Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 2.

$$\tau \begin{pmatrix} -\rho & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -\rho & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -\rho \end{pmatrix} \quad \tau_{xz} \sim \frac{\partial V_z}{\partial x}, \quad \tau_{xy} \sim \frac{\partial V_y}{\partial x} \quad \tau_{yx} \sim \frac{\partial V_x}{\partial y}, \quad \tau_{yz} \sim \frac{\partial V_z}{\partial y}$$

$$\tau_{zy} \sim \frac{\partial V_y}{\partial z}, \quad \tau_{zx} \sim \frac{\partial V_x}{\partial z}$$

Úloha 3:

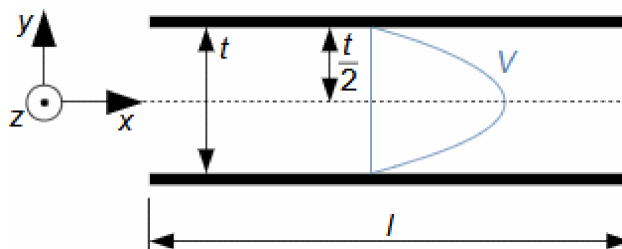
Určete viskozitu směsi dusíku N_2 a kyslíku O_2 při standardních podmínkách. Molární zlomek dusíku pro tuto směs je 0,785. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 3.

§1	zadáni:	δ_{N_2}	§3	výpočet:	δ_{O_2}
§2	odečet:	η_i	§4	výpočet:	η

Výpočet je proveden v Příloze 3.

Úloha 4:

Stanovte rovnice pro ztrátové teplo, tlakovou ztrátu a rychlost pro případ ustáleného plně vyvinutého laminárního proudění nestlačitelné tekutiny mezi dvěma deskami. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 4.



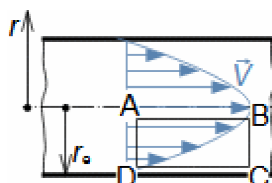
$$V_x = 6 \frac{Q}{h \cdot t^3} \left(\frac{t^2}{4} - y^2 \right)$$

$$L_{q,x} = 12 \frac{Q \cdot \eta}{\rho \cdot h \cdot t^3}$$

$$L_p = 12 \frac{Q \cdot \eta}{h \cdot t^3} l$$

Úloha 5:

Určete gradient rychlosti laminárního proudění v potrubí a odvoďte rovnici pro přírůstek rychlosti. Proveďte cirkulaci vektoru rychlosti laminárního proudění po uzavřené křivce a rozhodněte, jestli má vektor rychlosti potenciál. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 5.



§1 odvození: $\text{grad } V$	§3 odvození: Γ
§2 odvození: dV	§4 rozhodnutí: potenciální, nebo nepotenciální proudění?

Výpočet je proveden v Příloze 5.

Odkazy

- ŠKORPÍK, Jiří, 2022, Základní rovnice lopatkových strojů, *turbomachinery.education*, Brno, <https://turbomachinery.education/zakladni-rovnice-lopatkovych-stroju.html>
- ŠKORPÍK, Jiří, 2023, Technická matematika, *engineering-sciences.education*, Brno, <https://engineering-sciences.education/technicka-matematika.html>
- ŠKORPÍK, Jiří, 2024, Termodynamika tepelných turbin, *turbomachinery.education*, Brno, <https://turbomachinery.education/termodynamika-tepelnych-turbin.html>
- BAUER, František, Oldřich BRŮHA a Zbyněk JAŇOUR, PEŠEK, Rudolf, ed., 1950, *Základy proudění*, Vědecko-technické nakladatelství, Praha.
- BIRD, Byron, STEWART, Warren, LIGHTFOOT, Edwin, 1960, *Transport phenomena*, John Wiley & Sons, New York. (České vydání: BIRD, Byron, STEWART, Warren, LIGHTFOOT, Edwin, 1968, *Přenosové jevy: sdílení hybnosti, energie a hmoty*, Academia, Praha)
- JÍCHA, Miroslav, 2001, *Přenos tepla a látky*, Vysoké učení technické v Brně, Brno, ISBN 80-214-2029-4.
- LATIF, Jiji, 2006, *Heat Convection*, Springer-Verlag, Berlin, ISBN-10 3-540-30692-7.
- MAŠTOVSKÝ, Otakar, 1964, *Hydromechanika*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha.
- MIKULA, Julius, KOČKA, Jaroslav, ŠKRAMLÍK, Emanuel, ŠTAUBER, Zdeněk, VESELÝ Adolf, OBR, Jan, 1974, *Potrubí a armatury*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha.
- WILKENS, Andreas; DREISEITL, Herbert; GREENE, Jennifer; JACOBI, Michael; LIESS, Christian SCHWENK, Wolfram, 2009, *Wasser bewegt: Phänomene und Experimente*, Haupt Verlag, Bern, ISBN 978-3258075211. (České vydání: Andreas; DREISEITL, Herbert; GREENE, Jennifer; JACOBI, Michael; LIESS, Christian SCHWENK, Wolfram, 2009, *Voda v pohybu - úžas v nás: pozorování a pokusy*, Malvern, Praha, ISBN: 978-80-7530-069-0)